Kan norske elever på 8. trinn noe algebra i det hele tatt?

En studie av oppgavebesvarelser i algebra fra TIMSS 2011 med fokus på feilsvar

Rune Resell-Hansen

Masteroppgave i realfagsdidaktikk ved
Det utdanningsvitenskapelige fakultet

UNIVERSITETET I OSLO

26.05.2014

Kan norske elever på 8. trinn noe algebra i det hele tatt?

En studie av oppgavebesvarelser i algebra fra TIMSS 2011 med fokus på feilsvar

Rune Resell-Hansen

2014

Kan norske elever på 8. trinn noe algebra i det hele tatt?

Rune Resell-Hansen

http://www.duo.uio.no/

Trykk: Reprosentralen, Universitetet i Oslo

Sammendrag

Denne oppgaven tar utgangspunkt i norske elevers svake prestasjoner i algebra fra TIMSS-undersøkelsen 2011. Formålet med oppgaven er å undersøke hvilken informasjon man kan få om elevenes forståelse ved å analysere besvarelser av algebraoppgaver med fokus på feilsvar. Med bakgrunn i teori om algebraiske konsepter, feiloppfatninger og læringsmuligheter i algebra, letes det både etter algebraisk forståelse og ulike feiltyper blant feilsvarene for å gi et mer nyansert bilde av norske 8. klassingers algebraferdigheter, eller mangel på slike, enn det som gis i den offisielle TIMSS-rapporten. Videre blir det undersøkt i hvilke grad funn støtter opp om tidligere og parallell forskning på beslektet tematikk.

Forskningsdesignet har elementer fra både kvantitative og kvalitative tilnærminger. Etter modell av koding og scoring fra TIMSS' scoringsguide, men med utvidede feilsvarskategorier, kodes 277 besvarelser på nytt og resultatene presenteres med deskriptiv statistikk. Det kvalitative aspektet ligger i hvordan feilsvarene blir analysert, hvordan tankegangen bak svarene blir identifisert og hvordan nye feilkategorier blir definert. De slutningene som trekkes på bakgrunn av funn er også av en kvalitativ karakter, da en statistisk hypotesetesting viser seg vanskelig å gjennomføre.

Av viktige funn har vi for det første at oppgaver som tester sentrale algebraiske konsepter som modellering, ligningsløsing og generalisering har svært høye andeler gale eller blanke svar. For det andre viser analysen av feilsvarene at det er vanskelig å identifisere feiloppfatninger, da antall ulike feilsvar er stort, og mange feilsvar synes tilfeldige som ved gjetting, noe som fører til at tankegangen bak i de fleste tilfeller er vanskelig å identifisere. Det kan synes som at vanskeligheter med å finne feiloppfatninger skyldes mangel på oppfatning om algebraiske konsepter, noe som indikerer at norske elever på 8. trinn i liten grad har lært den algebra som forventes i TIMSS. Dette sammenfattes i konklusjonen som sier at norske elever på 8. trinn viser liten forståelse for samtlige algebraiske konsepter som beskrives i denne studien. Funnene støtter også tidligere og parallell forskning som antyder at mangelfull dekning av sentrale algebraiske konsepter i norske lærebøker på 8. trinn svekker elevenes læringsmuligheter (Karimzadeh, 2014).

Forord

Det er med ydmykhet og spenning jeg med denne oppgaven avslutter studietilværelsen, og tar steget opp på terskelen av en yrkeskarriere i skolen. Jeg føler at jeg gjennom dette prosjektet har fått en unik innsikt i de sider ved norsk skole som TIMSS-undersøkelsen belyser. Jeg sitter igjen med viktig kunnskap om utfordringer i norsk matematikkundervisning, kunnskap som jeg tror kan hjelpe meg mot målet om å utvikle meg til en kompetent lærer med en vid horisont og kreative ideer.

Det har vært svært lærerikt å erfare og reflektere rundt forskningsprosessen. Selv om jeg ikke har samlet inn datamaterialet selv, har jeg blitt godt kjent med mange aspekter av TIMSS-undersøkelsen, både gjennomføring av datainnsamling, administrering, scoring og analyser. Denne innsikten har gitt meg stor respekt for den omfattende jobben som er gjort, både her til lands og rundt om i verden. Mitt håp er at denne oppgaven kan være et nyttig bidrag til denne viktige forskningen.

Dette prosjektet har naturligvis ikke blitt gjennomført uten hjelp og støtte, og i den anledning er det mange som fortjener en takk. Jeg vil takke veilederne mine, Inger Christin Borge og Helmer Aslaksen for kyndig veiledning. Jeg vil også takke resten av gjengen i EKVA, spesielt Liv Sissel Grønmo og Torgeir Onstad for deres entusiasme og inspirerende tips, og Ann-Britt Haavik for uvurderlig hjelp med å skaffe til veie datamaterialet. (Det var en omfattende jobb å grave fram ønsket informasjon om alle algebraoppgavene i TIMSS, tusen takk!) En takk til mine medstudenter er også på sin plass. Det har vært nyttig å utveksle erfaringer, frustrasjoner og tips de gangene vi har møttes. En spesiell takk til Anita Karimzadeh som jeg har samarbeidet og delt veiledere og veiledninger med.

Sist men ikke minst må jeg få takke familien min. Jeg vil takke mine to eldste barn Benjamin og Nora som muligens har lært at det kan være lurt å gjøre seg ferdig med studier *før* de får barn, men vi har nok alle tre satt pris på fordelene ved det å være student-pappa, for eksempel hyggelige morgenturer på skolevei til henholdsvis Vinderen og Blindern. En varm takk til lille Lucas som dukket opp i livene våre sommeren 2013, og som på en sjarmerende måte har komplisert tilværelsen med å gi oss litt mer å gjøre, litt mindre søvn, og 14 ukers pappaperm midt i masterskrivingen. Så en kjærlig takk til kona mi, Stine, som gav meg troen på at dette var mulig å gjennomføre, og som har støttet meg hele veien. Takk for din tålmodighet og dine uvurderlige oppmuntringer!

Oslo, 25 mai 2014, Rune Resell-Hansen

Innholdsfortegnelse

1 Innledning

1.1 Introduksjon

Nasjonale og internasjonale prøver, tester og utdanningsstudier har vært et omdiskutert, men viktig og betydningsfullt verktøy i norsk utdanning siden de oppsto på 60- og 70-tallet. Dette prosjektet tar utgangspunkt i resultater fra en slik internasjonal studie, TIMSS – *Trends in International Mathematics and Science Study*, som gjennomføres hvert fjerde år, og som tester elever på 4. og 8. trinn i matematikk og naturfag. I sin nåværende form har studien hatt Norge som deltakerland fire ganger, i 1995, 2003, 2007 og 2011. Det vakte stor uro på alle nivåer i det norske utdanningssystemet da resultatene fra TIMSS-undersøkelsen 2003 ble offentliggjort, og avdekket en markant nedgang i norske elevers matematikkferdigheter sammenlignet med resultatene fra 1995. Rapporten fra studien viste at vi lå signifikant under det internasjonale gjennomsnittet, og presterte betydelig svakere enn land vi liker å sammenligne oss med (Grønmo et al., 2012). PISA-undersøkelsen (*Programme for International Student Assessment*) som også tester matematikkferdigheter, men i tillegg lese- og skriveferdigheter, bekreftet samme år den negative trenden. Det ble et krav både mot og fra myndighetene om at noe måtte gjøres for å bedre kompetansen til norske elever. Og tiltak ble iverksatt. De alarmerende resultatene fra internasjonale undersøkelser var en av de viktigste årsakene til at det ble utarbeidet ny læreplan som ble innført i 2006: Kunnskapsløftet, LK06 (Sjøberg, 2007). Denne læreplanen innførte blant annet grunnleggende ferdigheter i alle fag, og intensiverte lese- og skriveopplæringen med det mål at elever skal kunne lese og skrive allerede etter første klasse. En tilsynelatende effekt av kunnskapsløftet kunne merkes så snart som i den neste TIMSS-undersøkelsen fra 2007, der vi kunne notere en liten framgang i matematikkferdigheter. Den positive trenden fortsatte i 2011, der vi scoret ytterligere litt høyere, men fremdeles under det internasjonale gjennomsnittet, og rapporten fra TIMSS 2011 fikk det passende navnet «Framgang, men langt fram» (Grønmo et al., 2012). Det var et funn i denne rapporten som appellerte til min nysgjerrighet, og førte til unnfangelsen av denne masteroppgaven. En sammenligning av de fire fagområdene innen matematikk som TIMSS-oppgavene for 8. trinn er delt inn i; Tall, algebra, geometri og statistikk, viste at norske elever på 8. trinn gjør det signifikant svakere i algebra enn i andre fagområder. I følge Grønmo og Onstad (2012) er dette en trend som kan påvises i alle årsklasser som lærer algebra, til og med blant studenter på både høyskole og universitet, deriblant lærerstudenter. Det kan med andre ord synes som om algebra faller spesielt vanskelig for norske elever. Dette gir opphav til en lang rekke spørsmål som både bør stilles, og har blitt stilt av myndigheter, forskere, lærere, media (Grinde, 2012) og av studenter i mastergradsoppgaver og doktoravhandlinger, for eksempel Margrethe Naalsund (2012) «Why is Algebra so difficult?» Dette spørsmålet har naturligvis også blitt stilt av forskerne bak diverse TIMSS-rapporter, og et funn som både er omtalt i flere TIMSS-rapporter og i Naalsund (2012), er at norske elever scorer dårligst på oppgaver som krever ferdigheter i formell algebra, mens de kommer relativt godt ut av oppgaver som sorterer under algebra, men som kan løses med en viss porsjon sunn fornuft og logiske resonnementer (Grønmo et al., 2012). Det antydes også i rapportene mulige årsaker til at vi er så svake i algebra. En årsak kan være lærernes kompetanse, en annen kan være at norske elever lærer algebra senere enn andre deltakerland, samtidig som norske elever er blant de yngste i TIMSS-undersøkelsen, blant annet grunnet forskjellig praksis i forskjellige land for når barna starter på skolen (Grønmo et al., 2012). Selv om deltakerlandene har blitt enige om oppgaver som skal undersøke sentrale deler av læreplaner i alle land, har Norge, i likhet med blant andre Sverige og Finland noen ekstra utfordringer fordi vi har læreplaner med kompetansemål som gjelder for tre år om gangen. Læreplanens kompetansemål for algebra gjelder derfor for hele ungdomstrinnet, slik at det i praksis er opp til den enkelte skole eller den enkelte lærer å avgjøre når elevene skal lære hva i algebra. Siden det er en sterk tradisjon i norsk skole for å legge opp undervisningen etter den valgte læreboka (Grønmo, Borge & Onstad, 2013), kan et sentralt spørsmål være hva elevene egentlig har lært når de gjennomfører TIMSS-prøven. Å se på lærebøker faller imidlertid utenfor denne oppgavens rammer, men funn som presenteres her bør sees i sammenheng med en masteroppgave som skrives parallelt av Karimzadeh (2014) om nettopp algebra i lærebøker. Mitt håp er at denne studien kan bidra til å supplere både tidligere og samtidig forskning, og til å belyse problematikken som her er omtalt.

1.2 Problemstilling og forskningsspørsmål

Hvis det hadde vært mulig å besvare spørsmålet «hvorfor er norske elever på 8.trinn så svake i algebra?» innenfor rammene av denne oppgaven, ville dette spørsmålet vært en klar favoritt til å bli hovedproblemstilling. Imidlertid er dette spørsmålet så komplekst og mangefasettert at det vil kreve massiv forskningsinnsats med en rekke forskjellige tilnærminger for å kunne besvares. Jeg har valgt en tilnærming der jeg vil studere 277 8.trinns-besvarelser fra TIMSS-

2011 hvorav jeg vil se på algebraoppgaver med et spesielt fokus på feilsvar. Jeg vil finne ut om feilsvarene kan gi meg informasjon om elevenes algebraferdigheter utover det vi får ved å lese de offentliggjorte resultatene fra undersøkelsen som hovedsakelig skiller mellom rette og gale svar. Hvis man tenker at elevenes algebraforståelse kan måles ved å telle hvor mange som har svart korrekt, ville denne studien vært overflødig siden dette allerede er gjort. Men tanken er at man ved å se på oppgaver med såkalt «constructed response» (ikke flervalg), hvorav noen av disse spør etter begrunnelse for svar, kan gi et mer utfyllende bilde av elevenes algebraforståelse. Hovedproblemstillingen blir da:

I hvilken grad kan en studie av besvarelser på utvalgte algebraoppgaver fra TIMSS 2011 gi en dypere forståelse av hva norske elever på 8. trinn kan og ikke kan i algebra?

Problemstillingen støttes av følgende forskningsspørsmål:

1) Hvilken informasjon kan feilsvarene på algebra-oppgaver fra TIMSS-undersøkelsen gi oss om norske 8.trinn-elevers algebraforståelse?

2) Hvordan kan denne informasjonen supplere tidligere og parallell forskning på området?

For å besvare forskningsspørsmålene vil jeg

1) Gå gjennom et antall besvarelser hvor jeg ser på utvalgte algebraoppgaver, notere forskjellige feilsvar og plassere disse i hensiktsmessig definerte feilsvarskategorier, sammenligne disse med svarkategoriene som er definert i TIMSS scoringsguide, og hvis nødvendig, utvide feilkodene. Deretter vil jeg kode alle svar og behandle resultatene statistisk for å kunne avgjøre om de forteller meg mer om elevenes algebrakunnskaper, og eventuelt hva.

2) Vurdere eventuelle funn i 1) opp imot beslektet forskning, og drøfte hvorvidt disse styrker eller svekker hypoteser om forklaringer på norske elevers vanskeligheter i algebra.

1.3 Oppbygning av oppgaven

I kapittel 1 vil oppgaven innledes og problemstillingen med tilhørende forskningsspørsmål presenteres og begrunnes.

Kapittel 2 vil være oppgavens teoridel som først ser på hva algebra er og hvordan den defineres i litteraturen. Et avsnitt om prealgebra trekker linjer fra aktiviteter i skolematematikken som leder opp mot introduksjonen av algebra. Så presenteres oppgavens teoretiske rammeverk som består av utvalgte underområder og konsepter i algebra som er relevante for TIMSS-oppgavene som skal gjennomgås. Disse konseptene beskrives med kriterier for hvordan man identifiserer forståelse, slik at jeg med støtte i teorien kan lete etter indikasjoner på algebraisk forståelse i besvarelsene. Teoridelen omfatter også et avsnitt om feiloppfatninger i algebra, og et om elevenes læringsmuligheter.

Kapittel 3 presenterer oppgavens design og metode. Kapittelet inneholder både teori om metoden som er valgt, og beskrivelse av fremgangsmåten som er benyttet i arbeidet med gjennomgang og koding av oppgaver. Det vil bli presentert teori om metode i TIMSS-undersøkelsen hvor det også blir redegjort for kodingssystemet som blir brukt til å kode TIMSS-besvarelser. Jeg vil så forklare hvordan jeg utvider dette kodesystemet for å tilpasse det til oppgavens formål. Et delkapittel redegjør for validitet og reliabilitet. Siste del av kapittelet inneholder en beskrivelse av de TIMSS-oppgavene jeg har valgt å se nærmere på.

Kapittel 4 gir en presentasjon av resultater. Første del av kapittelet beskriver kriteriene for de nye kodene jeg har funnet hensiktsmessige etter gjennomgangen av oppgavene. De resterende avsnittene presenterer deskriptiv statistikk som viser frekvensanalyser med forekomster av de forskjellige kodene.

Kapittel 5 er oppgavens drøftingsdel hvor resultatene blir tolket og diskutert. Funn blir presentert. Betraktningene i dette kapittelet danner grunnlaget for konklusjonene som trekkes i avslutningskapittelet.

Kapittel 6 inneholder en oppsummering og en konklusjon hvor jeg vil forsøke å besvare forskningsspørsmål og problemstilling på bakgrunn av funn som er diskutert i foregående kapittel.

2 Teori

I teoridelen av oppgaven vil jeg først se på hva algebra egentlig er ved å presentere forskjellige definisjoner fra faglitteraturen. Videre vil jeg skissere opp et teoretisk rammeverk som omfatter sentrale underområder av, og konsepter i algebraen som er relevant for TIMSS-oppgavene som er blitt analysert. Da noen av oppgavene ligger nærmere det som regnes som prealgebra (*early algebra*) vil jeg også si litt om dette. I den senere presentasjonen av oppgavene, besvarelsene og tolkningen av disse vil jeg lete etter indikasjoner på hvilken grad av forståelse elevene viser for de omtalte konseptene. I de to siste delkapitlene vil jeg ta for meg noe teori om feiloppfatninger og feiltyper i algebra, og avslutningsvis teori om elevenes læringsmuligheter i algebra.

2.1 Hva er algebra?

Dette er et spørsmål som kan være overraskende vanskelig å svare på, spesielt for den jevne borger uten den helt store matematiske innsikten, men trolig også for matematikklærere, studenter og andre som kan påberope seg en viss kjennskap til fagfeltet, og som sannsynligvis kan si en del om hva algebra handler om, for eksempel ved å liste opp hvilke delområder eller kompetanseområder som sorterer under den store algebraparaplyen. En måte å besvare spørsmålet på, blir dermed å si noe om hva algebraen *inneholder*, hva som finnes av underområder, konsepter og tilnærminger. En annen måte å besvare spørsmålet i overskriften på er å gi en definisjon av algebra, og det er her det kanskje stopper opp for mange. «Defining algebra is fraught with difficulty, especially if one expects tight and closed epistemological definitions»(Lins & Kaput, 2004, s. 48). Til tross for og på grunn av dette er det en rekke forskere innen matematikk og matematikkdidaktikk som både har forsøkt å definere algebra, beskrive algebra, og belyse de mange aspektene ved algebra både som et uvurderlig viktig verktøy i matematikken, og som et problematisk område i matematikkundervisning. I det følgende skal vi se på hvordan noen forskere definerer algebra:

La oss først se hvordan algebra defineres i en typisk encyclopedia, for eksempel nettutgaven til Store Norske leksikon: Etymologisk kommer algebra fra det arabiske «al-jebr» som betyr gjenforening eller kombinasjon. Algebra defineres videre som «gren av matematikken, kan i sin enkleste (og eldste) forståelse defineres som læren om ligninger og variable, men oppfattes i dag mer generelt som studiet av algebraiske systemer (…) og avbildninger mellom slike.» (Aubert, 2014) Siden denne oppgaven omhandler algebra på ungdomstrinnet, blir den første delen av definisjonen mest relevant, da algebraiske systemer her refererer til mer abstrakte former for algebra på universitetsnivå.

Vi beveger oss nå videre over i et mer matematikkdidaktisk landskap. David Wheeler (1996) sier det slik: «Algebra is a symbolic system (…), but it's also more than a symbolic system. Algebra is a calculus (…), but it's also more than a calculus. Algebra is a representational system (…), but it's also more than a representational system» (Wheeler, 1996, s. 319). Lesley Lee (1996) ser på algebra som en kultur, eller snarere en underkultur av den matematiske kulturen. Hun beskriver derfor algebraen gjennom de egenskapene den har i kraft av å være en kultur, en matematisk gren som har sitt eget språk (symbolspråk), og sine egne aktiviteter der generalisering trekkes frem som en særlig sentral aktivitet. Denne tilnærmingen til algebra tillater henne å bruke metaforer som «kulturelt sjokk» for å beskrive elevers ofte litt vanskelige møte med algebra (Lee, 1996). Carolyn Kieran (2004) refererer til et annet arbeid av Lesley Lee, en studie der hun har stilt spørsmålet «Hva er algebra?» til både matematikere, lærere, studenter og matematikkdidaktikkforskere, for deretter å sortere svarene i syv temaer: 1) Algebra er et skolefag, 2) Algebra er generalisert aritmetikk, 3) Algebra er et verktøy, 4) Algebra er et språk, 5) Algebra er en kultur, 6) Algebra er en måte å tenke på, 7) Algebra er en aktivitet (Kieran, 2004). I en annen artikkel oppsummerer Kieran (2007) Alan Bell (1996) ved at algebra er et middel for 1) å uttrykke generaliseringer, relasjoner og formler, 2) løse problemer, 3) betegne ukjente størrelser, 4) løse ligninger.

Det blir vanskelig å fortsette utgreiingen om hva algebra er uten å komme tilbake til hva algebra inneholder, så jeg vil heretter forsøke å definere algebra gjennom hvilke underområder og konsepter som finnes i denne meget sentrale grenen av matematikken. I læreplanen for ungdomstrinnet finner vi kompetansemål i algebra under overskriften «tall og algebra» hvilket indikerer at algebra, tall og aritmetikk er nært beslektet. Jeg gjengir i det følgende et utvalg av de mest relevante kompetansemålene for 8. til 10. trinn:

- bruke faktorar, potensar, kvadratrøter og primtal i berekningar
- behandle, faktorisere og forenkle algebrauttrykk, knyte uttrykka til praktiske situasjonar, rekne med formlar, parentesar og brøkuttrykk og bruke kvadratsetningane
- løyse likningar og ulikskapar av første grad og likningssystem med to ukjende og bruke dette til å løyse praktiske og teoretiske problem

- analysere samansette problemstillingar, identifisere faste og variable storleikar, kople samansette problemstillingar til kjende løysingsmetodar, gjennomføre berekningar og presentere resultata på ein formålstenleg måte (Utdanningsdirektoratet, 2014)

Vi ser at med unntak av formuleringen «knytte uttrykka til praktiske situasjonar», handler de to første målene først og fremst om aritmetikk. Aritmetikk er den matematiske grenen som handler om å utføre regneoperasjoner på tall. De første årene på skolen lærer elevene de fire grunnleggende regneoperasjonene addisjon, subtraksjon, multiplikasjon og divisjon. Som vi ser av det første kompetansemålet skal de i løpet av ungdomskolen ha lært å beherske mer kompliserte regneoperasjoner som potenser og kvadratrøtter. Men i det første målet er det ingen formuleringer som forteller at dette handler om noe mer enn regneoperasjoner på tall, så dette målet kan knyttes til det fagområdet som i TIMSS-undersøkelsen kalles «tall». Hvis vi går til det andre kompetansemålet, ser vi en utvidelse til å gjøre beregninger med «algebrauttrykk» som vi må forstå som uttrykk med andre symboler enn tallsymboler, som oftest bokstaver. Også dette målet handler om å benytte regneoperasjoner, her også medregnet brøkuttrykk, faktorisering og forkorting, hvilket forteller at vi fremdeles snakker om aritmetikk, men siden vi nå utfører aritmetikk på algebraiske uttrykk, har vi blitt introdusert for et viktig område under algebra som vi skal komme tilbake til; *generalisert aritmetikk*.

Det tredje kompetansemålet jeg har tatt med bringer oss videre til et annet svært sentralt underområde av algebraen; *løsning av ligninger og ulikheter*.

Det fjerde kompetansemålet favner nokså bredt, og tar for seg flere områder som både kan tilskrives algebra, men også matematikk generelt. Disse kan samles under begrepet *problemløsning*. Problemløsning er en helt sentral del av matematikken hvor algebraiske verktøy som ligninger er vanlig å bruke. For å kunne oversette et praktisk problem til matematikk, enten i form av en ligning, en funksjon eller statistikk må man utføre en *matematisk modellering*, et annet underområde av algebra som også er et viktig verktøy i matematikk og naturvitenskap generelt.

Vi har nå identifisert noen underområder av algebraen ved å se på kompetansemålene fra læreplanen. Men som vi skal se er det mange måter å dele algebraen inn i underområder, tilnærminger eller kategorier på i faglitteraturen, og alle sier de noe om hva algebraen inneholder og dermed også noe om hva algebra er. I «Approaches to Algebra: Perspectives for Research and Teaching (Bednarz, Kieran & Lee, 1996) har redaktørene delt inn en rekke artikler i fire deler som alle representerer forskjellige tilnærminger til eller perspektiver på hvordan man introduserer algebra i skolen. Disse tilnærmingene kan også sees på som en måte å dele inn algebra i underområder. De fire delene har overskriftene «*A generalization perspective on the introduction of algebra*», hvor de tre andre bytter ut «*generalization*» med «*problem-solving*», «*modeling*» og «*functional*». De samme fire elementene blir kalt «basic ingredients of school algebra» av Carolyn Kieran (2004) i artikkelen «The Core of algebra: Reflections on its main Activities» hvor hun også deler inn algebraiske aktiviteter i 1) *Generational activity*: For eksempel generalisering av geometrisk mønstre eller tallsekvenser og det å uttrykke regler for numeriske sammenhenger (formler), 2) *Transformational activity*: For eksempel løsning av ligninger, forenkle uttrykk, sammenligne ekvivalente uttrykk og 3) *Global/meta-level activity*: Aktiviteter hvor algebra blir brukt som verktøy, men som ikke er eksklusivt for algebra, for eksempel problemløsning og modellering (Kieran, 2004). Hun utdyper disse aktivitetstypene i Kieran (2007) hvor hun også oppsummerer hvordan andre forskere beskriver og deler inn algebraen. For eksempel viser hun til Usiskin (1988) som definerer fire begreper i algebra: 1) Generalisert aritmetikk, 2) prosedyrer for å løse visse typer problemer, 3) studiet av relasjoner mellom mengder og 4) studien av strukturer. Hun nevner også Kaput (1995) som har identifisert fem aspekter av algebra: 1) Generalisering og formalisering, 2) syntaktisk guidet manipulering, 3) studien av struktur, 4) studien av funksjoner, relasjoner og samvariasjon og 5) et modelleringsspråk.

En arbeidsgruppe nedsatt i forbindelse med den 12. ICMI-studien (International Commission on Mathematical Instruction), 2000-2004, ledet av Rosamund Sutherland, som hadde som mandat å jobbe med tilnærminger til algebra, kom frem til at de fire anerkjente tilnærmingene (basic ingredients of school algebra) nevnt ovenfor, på mange måter ikke er tilstrekkelig til å dekke alle aspekter ved algebra. Samtidig var det en uoverkommelig utfordring å enes om alternative tilnærminger da det var like mange oppfatninger om dette som medlemmer av gruppen. Oppfatningene varierte for eksempel med hvilke land deltakeren kom fra og dermed hvilken skolekultur de representerte. Noen land hadde en sterk tradisjon for en ligningsløsningsbasert tilnærming til algebra, mens andre savnet en tilnærming som handlet om bruken av symboler og bokstaver (Sutherland, 2004). *Ligningsløsning* og *symbolbruk* er to aspekter av algebra som jeg finner hensiktsmessig å omtale som egne kategorier i det teoretiske rammeverket jeg skal beskrive senere.

Det vil være å bevege seg langt utenfor denne oppgavens rammer å gjengi hva alle respekterte forskere har uttalt om definisjoner og innhold i algebra, så jeg vil nå gå over til å plukke ut de aspektene eller konseptene som er hensiktsmessige og relevante for TIMSS-oppgavene jeg har valgt å analysere. Disse konseptene vil utgjøre det teoretiske rammeverket for oppgaven. Men først litt om hvordan algebra introduseres i skolen, og hvilke deler av matematikken som undervises *før* man kaller det algebra og som algebraen utgjør en naturlig fortsettelse av.

2.2 Prealgebra (Early Algebra)

Etter å ha sett på hvordan algebra defineres og beskrives av forskere og matematikkdidaktikere, kan vi si med en viss tyngde at algebra i stor grad handler om matematikk som tar i bruk bokstaver, enten det er for å generalisere, for å stille opp og løse en ligning eller for å manipulere og utføre regneoperasjoner på bokstavuttrykk. Bokstaver som matematiske symboler dukker ikke opp i skolematematikken før rundt overgangen til ungdomstrinnet. Betyr dette at vi kan si at algebra ikke forekommer i de første årene på skolen, men at den plutselig dukker opp på et eller annet tidspunkt? Eller er det slik at den innføres gradvis og først i «forkledning»? Eller er det første tilfellet mens det andre burde være tilfellet? Det er skrevet mye om hvordan algebra kan og bør innføres og tilnærmes i artikler som ofte har «early algebra» som stikkord, se for eksempel Carraher og Schliemann (2007). En norsk oversettelse av dette begrepet jeg kommer til å benytte er *prealgebra* (Selvik, Rinvold & Høines, 2007). Prealgebra handler om hva som kommer før algebraen og hvordan man kan introdusere algebra fra eller ved hjelp av dette. Jeg vil nevne to aspekter her: 1) Overgangen fra aritmetikk til algebra og 2) Geometriske mønstre eller tallmønstre som generaliseres ved overgangen til algebra.

Overgangen fra aritmetikk til algebra er mye omtalt i litteraturen, for eksempel av Subramaniam og Banerjee (2011), Russell, Schifter og Bastable (2011) og Lins og Kaput (2004). Sistnevnte hevder at det har vært en sterk tradisjon i mange land for at aritmetikken ikke bare læres før algebraen, men at de to grenene læres adskilt fra og uavhengig av hverandre etter prinsippet «lær aritmetikk først, så algebra» fordi algebraen har høyere abstraksjonsnivå, og dermed regnes som vanskeligere. Dette synet har imidlertid fått en del kritikk, og en alternativt tilnærming som foreslår å innføre algebra tidligere og delvis parallelt med aritmetikken for å øke forståelsen av algebra, har blitt fremmet av blant andre Fujii og Stephens (2001) som eksperimenterer med såkalte kvasi-variable; tall som oppfører seg som variabler ved at de for eksempel legges til og trekkes fra et uttrykk slik at dette forblir uendret selv om man endrer på tallene. På denne måten kan yngre elever lære egenskapene til en variabel før variabler i form av bokstaver innføres. Britt og Irwin (2011) viser til studier som tyder på at barn har potensiale til å kunne tenke algebraisk *før* man vanligvis lærer aritmetikk. En annen indikasjon på det sterke båndet mellom aritmetikk og algebra er den tidligere nevnte oppfatningen av algebra som generalisert aritmetikk.

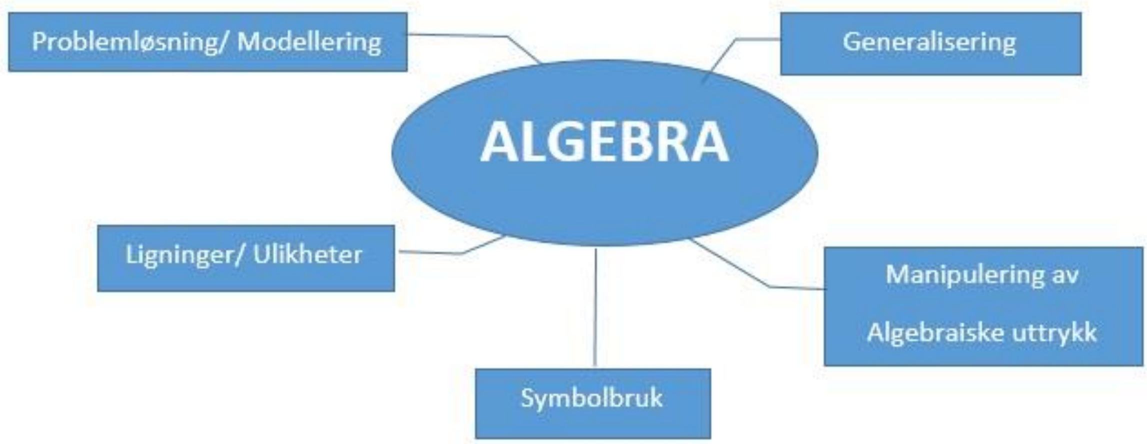
Det andre aspektet av prealgebra som er relevant for denne oppgaven handler om at elever på mellomtrinnet møter på oppgaver av typen «Hva er neste tall i tallsekvensen» eller «hvor mange firkanter er det i neste figur», der elevene skal identifisere et tallmønster eller et geometrisk mønster. Når elevene så introduseres for algebra utvides slike oppgaver til også å spørre etter et generelt uttrykk for den *n*-te figuren eller det *n*-te elementet i sekvensen. Dette temaet blir belyst i studier av for eksempel Rivera og Becker (2011) og Lee (1996). Sistnevnte er sammenlignbar med noen av TIMSS-oppgavene i denne studien da oppgavene er av samme type, og elevene er omtrentlig like gamle. Interessante funn fra studien til Lee er at elevene som løste varianter av oppgaver som handlet om å finne antall prikker i rektangelmønstre, var nokså gode på å finne mønstre, men at de slet med å finne generelle uttrykk, både fordi generaliseringskonseptet var vanskelig for dem, og fordi mange slet med å forstå den generaliserte aritmetikken i for eksempel $x \cdot (x + 1)$.

2.3 Teoretisk rammeverk: Fem konsepter i algebra.

Som teoretisk rammeverk i denne oppgaven vil jeg omtale fem konsepter i algebra som er relevante for de TIMSS-oppgavene jeg analyserer. Hvis jeg finner indikasjoner på forståelse av en eller flere av disse konseptene i besvarelsene vil jeg omtale dette som en grad av algebraisk forståelse, og bruke disse som kriterier for å avgjøre om norske elever på 8. trinn behersker algebra i noen grad. Denne oppdelingen vil naturligvis også kunne peke på hvilke områder norske elever viser forståelse eller mangel på forståelse.

Jeg bør nok her klargjøre hvordan jeg forstår begrepet «algebraisk forståelse», da forskjellige typer matematisk forståelse er mye diskutert og omtalt i faglitteraturen. For eksempel snakker Solvang (1992) om forståelse fra et konstruktivistisk perspektiv som Piagets akkomodasjon av skjemaer, og beskriver senere den mye omtalte distinksjonen mellom instrumentell forståelse og relasjonell forståelse (se også for eksempel Mellin-Olsen (1981)), der instrumentell forståelse handler om operasjonelle kunnskaper, mens den relasjonelle forståelsen er en dypere innsikt som handler om å se strukturen og sammenhenger i og mellom matematiske objekter. Dette er også i trå med Sfard (1991) og hennes betraktninger om matematikkens duale natur, matematikk som prosesser og objekter, og matematisk forståelse som «reification». Det vil imidlertid være både svært omfattende og meget vanskelig å gå inn i hver enkelt besvarelse og identifisere akkurat hvilken forståelsestype den enkelte elev viser, så i denne studien vil jeg omgå dette problemet ved å oppgi enkle kriterier for hva jeg regner som algebraisk forståelse under hvert delområde i det teoretiske rammeverket.

De fem konseptene er plukket som et utvalg av de forskjellige måtene å dele algebraen inn på som her er presentert, og satt sammen til en modell som er hensiktsmessig for denne oppgaven. Dette betyr at modellen ikke nødvendigvis har universell gyldighet, men der jeg har gjort valg som avviker fra anerkjente måter å dele algebraen inn på vil jeg begrunne dette i de neste seksjonene. Fig 1 viser et skjematisk oppsett av modellen.



Figur 1: Skjematisk modell som viser hvordan de forskjellige algebraen er delt inn i det teoretiske rammeverket for denne oppgaven

Tre av konseptene finner vi igjen i «four approaches to algebra» (Bednarz et al., 1996), vi har *generaliseringsperspektivet, problemløsning og modellering*, men de to sistnevnte er slått sammen av grunner vi kommer tilbake til. *Ligninger/ ulikheter* omtaler jeg som et eget konsept, mens de to siste rektanglene representerer to grunnleggende konsepter som fungerer som henholdsvis basisingrediens og basisverktøy i alle aspekter av algebra, *symbolbruk* og *manipulering av algebraiske uttrykk*. Jeg er av den oppfatning at man kan rettferdiggjøre en behandling av disse også som selvstendige konsepter, ikke minst fordi det kan forekomme oppgaver på lavere nivå i algebra som kun tester ferdigheter innenfor enten symbolbruk (for eksempel oppgaver hvor man regner ut et uttrykk ved å sette inn tall for bokstaver), eller manipulering av algebraiske uttrykk (som langt på vei er synonymt med generalisert aritmetikk).

Den fjerde av de omtalte tilnærmingene til algebra, funksjoner, er utelatt av den enkle grunn at de ikke opptrer i oppgavene jeg analyserer. Modellen i fig 1 er en enkel inndeling som ikke viser hvordan de forskjellige områdene overlapper og henger sammen, men det vil til en viss grad fremkomme av beskrivelsene under at de fleste algebraiske konseptene er nært knyttet sammen.

2.3.1 Generalisering

"(…) *the heart of teaching mathematics is the awakening of pupil sensitivity to the nature of mathematical generalization* (…)" (Mason, 1996, s. 65). Disse ordene fra John Mason, hentet fra innledningen til hans artikkel i Approaches to Algebra (Bednarz et al., 1996) i den delen av boka som heter «A generalization Perspective on the Introduction of Algebra», forteller noe om hvor viktig generalisering er i matematikken generelt og algebra spesielt. Litt enkelt sagt består læringsløpet i matematikk av en tidlig del hvor matematikken er veldig konkret, hvor den handler om tall og regning med tall, før den går over i en fase på ungdomstrinnet og videregående hvor man introduseres for generalisering gjennom å bytte ut tall med bokstaver i algebraen. For de som fortsetter løpet videre møter de så universitetsmatematikken hvor man knapt nok regner med tall, hvor abstraksjonsnivået er høyt og hvor generalisering gjennomsyrer matematikken. «*Generalization is the heartbeat of mathematics*» (Mason, 1996, s. 65) For å få grep om matematikken er det derfor svært viktig at elevene forstår generaliseringsprinsippet. For elever på 8. trinn er generalisering noe nytt. De TIMSS-oppgavene som analyseres her inneholder derfor enkle og grunnleggende elementer av generalisering. De tester elevenes forståelse av at en bokstav kan ha en numerisk verdi, de tester generalisering av geometriske mønstre og tallmønstre som omtalt i prealgebradelen, og de tester forståelsen av generalisert aritmetikk, regning med algebraiske uttrykk som vi kommer tilbake til senere. Kriterier for forståelse av generaliseringskonseptet vil da for eksempel være at eleven forsøker å lage et uttrykk med *n* i oppgaver der de skal generalisere et mønster for det *n*'te elementet/ leddet, at de behersker de enkleste oppgavene som kan løses ved innsetting av tall for bokstaver, og at de i aritmetiske operasjoner med bokstaver ikke viser feiloppfatninger som omtales senere i teoridelen.

2.3.2 Problemløsning/Modellering

To av de fire tilnærmingene til algebra som omtales i «Approaches to Algebra» (Bednarz et al., 1996) er problem-løsningsperspektivet og modelleringsperspektivet. At de behandles som to adskilte perspektiver er helt naturlig da de skiller seg ut på mange områder, men til tross for det har jeg valgt å slå sammen problemløsning og modellering som ett teoretisk begrep til denne oppgavens formål. Før jeg begrunner dette, la oss se nærmere på hva de handler om hver for seg.

Problemløsning er naturligvis et svært vidtfavnende begrep som ikke trenger å ha noe med matematikk å gjøre, men innenfor matematikken er problemløsning et eget fagområde, forsket på og utforsket så lenge matematikken har eksistert, og kan kanskje demonstrere sin signifikans ved å besvare spørsmålet «Hva skal vi med matematikk?» Jo, vi løser problemer. Det navnet som oftest knyttes til problemløsning i moderne tid er George Pòlya, den ungarske matematikeren som i «How to Solve it» (Pòlya, 1973), først utgitt i 1945, gav oss en firetrinns fremgangsmåte for hvordan vi løser problemer generelt: 1) Forstå problemet, 2) Lag en plan, 3) Utfør planen og 4) Evaluer løsningsmetoden. For mer spesifikke problemstillinger tilbød han også en rekke løsningsstrategier kalt heuristikker som kan anvendes på problemet. Senere har heuristikk og problemløsning blitt knyttet tett sammen av blant andre Schoenfeld (1985). I skolematematikken opptrer problemløsning som for eksempel tekstoppgaver innen aritmetikk (Lise, Lotte og Per skal dele 600 kr, hvor mye får hver), og senere i algebra (Lise har dobbelt så mye som Lotte og 200 kr mer enn Per, de har 1300 kr til sammen, hvor mye har hver?), henholdsvis aritmetisk løsning og algebraisk løsning (Sutherland, 2004). I sistnevnte eksempel benyttes gjerne algebraiske verktøy som ligningsløsning for å løse problemet.

Matematisk modellering blir brukt til å beskrive virkeligheten med matematikk, det vil si lage matematiske modeller av virkeligheten. Modellering er et svært viktig verktøy i de fleste naturvitenskapene, spesielt i fysikk. Teori om modellering deler modelleringsprosessen inn i to faser, en formuleringsfase og en valideringsfase (Janvier, 1996) der formuleringsfasen innebærer å etablere en sammenheng mellom de involverte variabler enten på bakgrunn av observasjoner, målinger eller kvalifisert gjetting, mens valideringsfasen går ut på å teste hvor godt modellen stemmer med virkeligheten. I skolematematikken brukes modellering ofte i løsningen av tekstoppgaver eller regnefortellinger (*narratives*) (Nemirovsky, 1996). Matematisk begrenser modelleringsvirksomheten i skolen seg stort sett til det å formulere ligninger og konstruere funksjoner. Av disse to er ligningsløsning mest relevant for denne oppgaven da jeg som tidligere nevnt ikke behandler funksjoner her. Det å modellere et problem ved å sette opp en ligning som så må løses, sammenfaller i stor grad med en typisk problemløsningsstrategi. Følger vi Pòlyas generelle steg på det siste eksempelet med Lise, Lotte og Per, vil første steg, «forstå problemet» være å identifisere problemet som en situasjon med tre ukjente størrelser, men som kan reduseres til et problem med bare en ukjent ved å uttrykke to av de ukjente med den tredje. Steg to, «Lag en plan» vil her være å planlegge modelleringsprosessen, vi ønsker å finne ut hvilke sammenhenger som finnes mellom de ukjente, vi vil gjerne skrive disse som en enkel, lineær ligning, som vi så ønsker å løse. I tredje steg utfører vi denne planen. Hvis Lotte har *x* kr, Lise har *y* kr og Per har *z* kr, kan vi bruke opplysningene i oppgaven til å skrive $y = 2x$ og $z = 2x - 200$, og deretter $x + y + z = 1300 \;\Rightarrow x + 2x + (2x - 200) = 1300$. Denne ligningen løses for å finne at $x = 300$ som ved innsetting gir at Lotte har 300 kr, Lise har 600 kr og Per har 400 kr. I siste steg vurderer vi løsningen og ser at den stemmer med opplysningene i oppgaven. Vi konstaterer at løsningsmetoden var vellykket. Å bruke en så detaljert og eksplisitt fremgangsmåte på et slikt eksempel kan synes som å skyte en spurv med kanon, men er her gjort for å illustrere et poeng. En sterk elev vil straks oppfatte at dette er et problem som kan løses ved ligning med en ukjent, og det vil sjeldent være påkrevd at man går via mellomregning med tre ukjente på en slik oppgave. Poenget jeg vil illustrere er at i skolematematikk-algebra tidlig på ungdomstrinnet vil problemløsning og modellering være så tett knyttet sammen at det er hensiktsmessig for denne oppgavens formål å la disse to konseptene opptre sammen i det teoretiske rammeverket. Vi ser også at flere i faglitteraturen har omtalt koblingen mellom problemløsning og modellering, for eksempel Björkquist (2003) som beskriver modelleringsprosessen i trinn som har mange likheter med en typisk problemløsningsprosess, og som i tillegg kaller modellering for «den mest fullstendige typen matematisk problemløsning» (Björkquist, 2003, s. 56).

I de aktuelle oppgavene fra TIMSS vil kriterier for forståelse av problemløsning/modellering være at eleven er i stand til å overføre problemet til matematikk i en eller annen grad, og deretter bør de finne en løsning på problemet. Slike oppgaver kan imidlertid være nokså komplekse for en elev på 8. trinn, så her må man se etter grader av forståelse, og om eleven har klart å løse oppgaven eller deler av oppgaven delvis tilfredsstillende.

2.3.3 Ligninger/ ulikheter

Ligningsløsning har allerede blitt omtalt som et verktøy i problemløsning og modellering. Mye av ligningens historie dreier seg nettopp om hvordan den har blitt brukt til å løse problemer, selv om vi også ser eksempler på at ligninger eller andre matematiske problemer har blitt forsøkt løst av nysgjerrighet eller som rekreasjon uten noen åpenbar praktisk anvendelsesmulighet (Onstad, 1994). Fra Babylon til Egypt, via de gamle grekernes geometriske ligninger til nåtidens kompliserte differensialligninger, har ligningen spilt en stor og viktig rolle i matematikkhistorien. Fra å være formulert med ord (i lange og tungvinte setninger) ble ligningsløsningen revolusjonert på 1500 og 1600-tallet ved innføringen av forkortelser som gradvis ble erstattet av symboler slik vi kjenner dem i dag, og ligningen fikk sin naturlige og sentrale plass i algebraen.

Det mest karakteristiske ved en ligning er «=»-tegnet. Det viktigste, men kanskje også noe av det mest utfordrende elevene må lære for å få en relasjonell forståelse for ligninger, er at det alltid skal være likhet mellom høyre og venstresiden av dette tegnet. Man kan pugge regler for ligningsløsning slik at man kan beherske ligningsløsning på et operasjonelt plan, men den dype forståelsen ligger i betydningen av likhetstegnet. Imidlertid kan en instrumentell forståelse være tilstrekkelig til å løse en ligning korrekt, spesielt siden ligninger for 8. trinn nesten utelukkende er enkle lineære ligninger som kan løses med enkle regler som «flytte-bytte» (Karimzadeh, 2014). En tilfredsstillende løst ligning vil da selvsagt indikere en tilstrekkelig instrumentell forståelse, mens den relasjonelle forståelsen neppe lar seg identifisere i TIMSS-oppgaver.

Ulikheter nevnes her fordi TIMSS 2011 har en oppgave som går ut på å løse en ulikhet, hvilket betyr at ulikheter også regnes med som et element elever på 8. trinn bør ha kjennskap til. Imidlertid er *en* oppgave lite representativt for algebraoppgavene i TIMSS, og oppgaven er ikke av de jeg går i dybden på i denne studien. Da ulikheter ellers ligger tett opptil ligninger hva angår løsningsmetoder, bruker jeg ikke mer tid på temaet her. Det vil bli presentert statistikk fra ulikhetsoppgaven under avsnittet om supplerende oppgaver for å komplettere bildet av elevenes algebrakompetanse.

2.3.4 Manipulering av algebraiske uttrykk: generalisert aritmetikk

Konseptet generalisert aritmetikk er nevnt flere ganger i dette teorikapittelet, men når jeg nå tar det opp igjen i avsnittet om manipulering av bokstavuttrykk, er det blant annet for å synliggjøre hvilke konsekvenser det får når bokstavene inntar aritmetikken. Etter møtet med algebraen vil nok mange frustrerte ungdom hevde at det er helt andre regneregler i algebra enn når de kun drev med de fire regneartene på tall. Vi vet imidlertid at det ikke er andre regneregler, men at reglene fra aritmetikken kompliseres ved at vi i algebra blander tall og bokstaver (Russell et al., 2011). Det at vi ikke kan trekke sammen tall og bokstaver eller forskjellige bokstaver, fører til behov for å ramme summer og differanser inn med parenteser, og det kreves etter hvert at elevene behersker å multiplisere, dividere eller faktorisere uttrykk med parenteser, og man må skille mellom ledd, faktorer og faktorer som består av ledd som er avgrenset med parenteser. Et illustrerende eksempel på forskjellen mellom aritmetikk og generalisert aritmetikk er kvadratsetningene. Den første av disse sier at $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Denne setningen er selvsagt også gyldig hvis man skal regne ut $(3+4)^2$, men den er helt unødvendig i dette tilfellet fordi vi lett kan trekke sammen leddene inne i parentesen og få $7^2 = 49$. Den generaliserte aritmetikken stiller som vi ser andre krav til ferdigheter innen de samme regneartene som vi finner i aritmetikk med tall. Elevene må kunne beherske utregning med parenteser, brøkuttrykk, forkorting, faktorisering, røtter og potenser. Disse teknikkene opptrer bare i lettere grad på 8. trinn, men de forkommer i TIMSS-oppgaver i algebra, og indikasjoner på algebraisk forståelse i møte med manipulering av algebraiske uttrykk er naturligvis at man behersker disse teknikkene i den grad som forventes på 8. trinn og at man unngår noen av feiloppfatningene som omtales i avsnitt 2.4.

2.3.5 Symbolbruk

Flere forskere beskriver algebra som en gren av matematikken utstyrt med sitt eget språk, se for eksempel Drouhard og Teppo (2004), Puig og Rojano (2004), og en tolkning av symbolbruken vi møter i algebra er at de er algebraens skriftspråk. Symboler er svært viktige i algebra, og symbolbruk gjennomsyrer alle aspekter av både algebra og mange andre grener av matematikken. Som vi har sett var det innføring av symboler som forenkling av den tungvinte måten å uttrykke ligninger på, som skapte algebraen slik vi kjenner den i skolematematikken. Puig og Rojano (2004) beskriver tre steg av den algebraiske språkutviklingen som begynner med nettopp den retoriske, via et synkopert stadium, og deretter over i moderne symbolbruk. Det er imidlertid mange utfordringer i læring av symboler, og i elevenes tilegning av mening til de forskjellige symbolene. Det å uttrykke tall med bokstaver kan være forvirrende nok, og den mest grunnleggende formen for algebraisk forståelse er nettopp forståelsen av at en bokstav kan ha en numerisk verdi. Men å forstå dette er bare første skritt på veien til en god konseptuell forståelse av bokstaver i algebra. En kompliserende faktor som bidrar til vanskeligheter i introduksjonen av algebra er at en bokstav både kan være en *ukjent størrelse* som i en ligning, eller en *variabel* som i en funksjon. Janvier (1996) byr på ytterligere to roller bokstaver kan spille i algebra; som et generalisert tall i en formel, eller som polyvalente navn eller plassholdere i identiteter som for eksempel kvadratsetningene. I tillegg er det konvensjoner i matematikken som legger føringer for hvilke bokstaver vi bruker i hvilke sammenhenger (Niss, 2006). Selv om elevene kanskje lærer at tall kan byttes ut med en hvilken som helst bokstav, må de etter hvert forholde seg til disse konvensjonene.

Det vil imidlertid være vanskelig å avgjøre hvorvidt elever på 8. trinn kan skille de forskjellige betydningene av bokstaver fra hverandre ut ifra det som fremgår av besvarelser på TIMSS-oppgavene, så til vårt bruk må vi forsøke å identifisere forståelse for bruken av bokstaver i den konteksten oppgaven befinner seg i. For eksempel vil det å sette opp og løse en ligning indikere forståelse for en bokstav som en ukjent størrelse som vi kan finne, mens bruken av n i generalisering av et geometrisk mønster vil indikere forståelse for n som et generelt tall som i en formel.

Videre kan det være vanskelig å forstå betydningen av tegn som «er lik»-tegnet, minus-tegnet, brøkstrek som deletegn, rottegn og parenteser. Som regel vil det fremgå av eventuelle utregninger hvorvidt eleven forstår disse symbolene, da manglende forståelse ofte lar seg identifisere gjennom vanlige misoppfatninger som beskrives i neste avsnitt.

2.4 Feiloppfatninger i algebra

Ved gjennomgangen av TIMSS-oppgaver i denne studien har jeg hatt et spesielt fokus på feilsvar, og hvilken informasjon disse kan gi om elevenes ferdigheter, eller mangel på ferdigheter i algebra. Vi skal derfor se litt på noen teoretiske aspekter ved feil og feiloppfatninger i algebra. Mange har forsket og skrevet om dette temaet, for eksempel Booth (1999) og Margrethe Naalsund (2012). Sistnevnte redegjør for feiltyper i sin doktoravhandling om vanskeligheter i algebra. Hun skiller tydelig mellom det vi kan kalle *feiloppfatninger* på den ene siden og *prosedyrefeil* på den andre siden. En feiloppfatning kommer til syne når det er tydelig at en elev har misforstått et konsept eller en algoritme slik at samme type feil blir gjort hver gang eleven får en oppgave som tester nettopp dette konseptet. En slik type feil kalles også for en systematisk feil. En prosedyrefeil oppstår derimot når noe går galt i løpet av de stegene som utgjør en prosedyre for å løse en oppgave. Slike feil kan oppstå selv om eleven egentlig forstår oppgaven og er i stand til å løse den korrekt. Man kaller det ofte slurvefeil eller tilfeldige feil (Naalsund, 2012). Hvordan kan man så avgjøre om en feil skyldes en misoppfatning eller en prosedyresvikt? Og finnes det feil som ikke er noen av delene? Hvis det foreligger en misoppfatning, ligger det i ordet at eleven må ha en oppfatning, selv om denne er feil. Hvis eleven skal løse en oppgave som tester et konsept eller et område av algebraen som eleven ikke kjenner eller har lært ennå, har eleven tre muligheter: 1) Man svarer ikke på oppgaven, 2) man gjetter, eller 3) man produserer et svar som virker logisk ut ifra de kunnskapene og forutsetningene man har (kvalifisert gjetting). Dette gir oss igjen tre muligheter når man møter på en feil i en elevbesvarelse, og jeg vil for denne oppgavens formål gi dem følgende navn: Type 1: Feilen skyldes en misoppfatning, Type 2: feilen skyldes prosedyresvikt, eller Type 3: Feilen er et resultat av mer eller mindre kvalifisert gjetting. Men spørsmålet om hvordan vi skiller de forskjellige feiltypene gjenstår. I noen tilfeller er det dessverre umulig å vite hva eleven har tenkt, og hvorvidt det er mulig avhenger av i hvilken grad eleven viser fremgangsmåte og utregning. Derfor er oppgaver som ikke er flervalg og hvor eleven i tillegg blir bedt om å begrunne svaret klart å foretrekke når man ønsker å drive diagnostisk forskning. Det finnes imidlertid grep man kan gjøre for å være best mulig forberedt i jakten på misoppfatninger, og det er å gjøre seg kjent med vanlige feiloppfatninger i algebra. I det følgende vil jeg derfor liste opp noen vanlige feiloppfatninger i algebra som beskrevet blant annet i Naalsund (2012). Disse feilene ble identifisert i hennes forskningsprosjekt og opptrer i oppgaver innen ligningsløsning og manipulering av algebraiske uttrykk:

- Flytter over ledd i en ligning uten å bytte fortegn.
- Tolker $2x$ som $2 + x$.
- Trekker sammen ledd av forskjellige typer, eks: $2x + 3 = 5x$.
- Ignorerer parenteser slik at $4(x + 5)$ blir til $4x + 5$.

To andre vanlige feiloppfatninger nevnes i Russell et al. (2011):

- Skriver sum opphøyd i et tall som $(a + b)^2 = a^2 + b^2$.
- «Ganger ut» produkt i parantes, for eksempel $2(xy) = (2x)(2y)$.

I tillegg tar vi med to algebraiske symboler som ifølge Kieran (2007) er gjenstand for forvirring og feiltolkninger:

- «Er lik»- tegnet, «=». Mange tolker dette som en operator som transformerer for eksempel 2 + 3 til 5, i stedet for et symbol som betyr likhet mellom høyre og venstre side (se også Knuth, Alibali, McNeil, Weinberg og Stephens (2011)). Ligninger kan da sammenblandes med vanlige regnestykker, og hele poenget med å utføre operasjoner på begge sider kan forsvinne for elever med slike feiloppfatninger.
- Minus-tegnet kan spille flere roller i algebra, både som fortegn for negative tall og som en subtraksjonsoperator. Dette kan føre til problemer med å tolke situasjoner som når man subtraherer negative tall.

2.5 Elevenes læringsmuligheter

Elevenes læringsmuligheter handler om hvilke forutsetninger elevene har for å kunne besvare oppgavene i TIMSS. Faktorer som avgjør elevers læringsmuligheter kan være elevenes egne forutsetninger for læring, det kan være kvalitet og kvantitet på undervisningen eller dekningsgrad av pensum, det vil si hvor mye av det elevene skal ha lært ifølge læreplanen, som de faktisk har lært (Grønmo, Borge & Rosén, 2013). Sistnevnte faktor kan til en viss grad undersøkes gjennom spørreskjemaet som lærerne får i TIMSS-undersøkelsen, der de blir spurt om hva de har undervist elevene i, samt tidsbruken på de forskjellige områdene. Forskere som jobber med TIMSS benytter et sentralt begrep fra utdanningsforskningen, OTL (*Opportunity To Learn*) som betegner forholdet mellom elevprestasjoner og læringsmuligheter. Begrepet omfatter flere variabler som brukes som indikatorer på OTL i TIMSS-undersøkelsen, for eksempel *tidsbruk* og *dekningsgrad* som også omfatter innhold i lærebøker. OTL kan ikke måles direkte, derfor er det i dybdeanalysene av TIMSS-dataene konstruert såkalte latente variabler basert på lærernes svar. Variabelen som er relevant for denne oppgaven, OTL-algebra, er basert på «fire indikatorer som går på i hvilken grad elevene har blitt undervist i tallmønstre, forenkling av algebraiske uttrykk, lineære likninger og ekvivalente representasjoner av funksjoner» (Grønmo, Borge & Rosén, 2013, s. 76). Følgende tall er hentet fra statistikken som blir presentert i Grønmo, Borge og Rosén (2013): Norske lærere svarer at de har brukt 18% av tiden de har til rådighet i matematikkundervisningen til algebra, mens de bare har gjennomgått 29% av emnene de fikk spørsmål om innen algebra. Samtidig ble prosjektlederne i deltakerlandene spurt om hvilken dekningsgrad de forventet ut fra landets læreplaner. For Norge var denne forventede dekningsgraden kun 20%. Dette lave tallet er en konsekvens av at de norske prosjektlederne må basere sine tall på hvordan læreplanen implementeres i praksis, da den norske læreplanen ikke har spesifikke mål for hvert trinn, men mål for hele ungdomstrinnet. Dette kan for eksempel gjøres ved å se på lærebøker siden mye av matematikkundervisningen i Norge, som nevnt i innledningskapittelet, er styrt av lærebøkene.

Denne studien undersøker ikke OTL, men funn som gjøres om hvilken forståelse eller mangel på forståelse elevene på 8. trinn viser i algebra kan brukes til å støtte oppunder forskning på læringsmuligheter, for eksempel lærebokstudien til Karimzadeh (2014). Begrensede læringsmuligheter vil kunne komme til syne i elevbesvarelsene ved at det er høye forekomster av type 3- feil, det vil si feil som kan tyde på gjetninger og grunnleggende mangel på algebraisk forståelse. En indikator på høye forekomster av type 3- feil er et stort antall ulike feilsvar hvor få lar seg identifisere som feiloppfatninger, og hvor elevenes tankegang ikke fremkommer av svarene.

3 Metode

Dette kapittelet tar for seg forskningsdesign, litt om datainnsamlingen som er gjort gjennom TIMSS 2011, et avsnitt om kodingssystemet og scoring av besvarelsene i TIMSS, en beskrivelse av fremgangsmåten i alle faser av prosjektet, en redegjørelse for validitet og reliabilitet, samt en presentasjon av algebraoppgavene som er gjenstand for analysen i denne studien.

3.1 Forskningsdesign

Det var naturlig å velge et forskningsdesign til dette prosjektet som ikke ligger så langt fra TIMSS-undersøkelsen i det metodologiske landskapet. I likhet med TIMSS ønsker jeg å si noe om elevenes ferdigheter basert på besvarelser innsamlet med spørreundersøkelse som metode, fra et stort representativt utvalg av norske elever. Jeg ønsker å kode svarene etter modell fra TIMSS' scoringsguide, og presentere resultater ved hjelp av deskriptiv statistikk. Det vil derfor være riktig å si at dette prosjektet har et design som hovedsakelig er kvantitativt. Likevel skiller det seg fra TIMSS på en måte som gjør at det blir vanskelig å kalle designet for utelukkende kvantitativt. Der TIMSS koder et stort antall besvarelser med et kodingssystem som gir gode muligheter for diagnostisk informasjon, men som ikke utnyttes til fulle, ønsker jeg å studere et noe mindre utvalg ved å gå inn i enkeltsvar for å identifisere elevens tankegang, slik at jeg kan definere flere feilkategorier som gir et mer nyansert bilde av elevenes ferdigheter. Dette gjør at forskningsdesignet også får et tydelig kvalitativt aspekt. Kan vi da kalle det et mixed methods-design? Det er ikke lett å gi et umiddelbart og entydig svar på dette, da vi befinner oss i et noe ulendt terreng i det metodologiske landskapet. Man kan si at metodene er «mixed» i ordets bokstavelige forstand, snarere enn at to separate metoder utfyller hverandre eller brukes til trianguleringsformål. Hvis vi vender oss til metodelitteraturen for hjelp ser vi at ifølge Tashakkori og Teddlie (1998) etablerte mixed methods seg som anerkjent forskningsmetode rundt overgangen fra 80- til 90-tallet som en reaksjon på en langvarig debatt mellom to paradigmer innen sosial-og adferdsforskning, kjent som «paradigme-krigene». Disse krigene ble utkjempet med positivister og kvantitative metoder som foretrukne tilnærminger på den ene siden, og konstruktivister som foretrakk kvalitative metoder på den andre siden. Situasjonen var til tider fastlåst, og det ble hevdet at dialog var nytteløst på grunn av inkompabiliteten mellom de to paradigmene. Dette synet som ble kalt «incompability thesis» ble fremmet av Smith and Heshusius (1986) ifølge Tashakkori og Teddlie (1998). Men mange fant etter hvert stridighetene unødvendige og lite produktive, og ut av denne «pasifismen» vokste et nytt paradigme frem; pragmatistparadigmet. Pragmatikerne mente at kvalitative og kvantitative metoder absolutt var kompatible, og ikke bare det, de kunne også komplettere hverandre på en hensiktsmessig måte. Med dette oppsto mixed methods som et fullgodt alternativ til enkeltstående metoder. Imidlertid ble det raskt klart at metodemiksing kan gjøres på mange forskjellige måter avhengig av blant annet hva som skal mikses, bredden og omfanget av miksingen, årsaken til miksingen, og forskningens orientering (Cohen, Manion & Morrison, 2011). Av den grunn finnes det i dag en rekke forskjellige måter å klassifisere mixed methods på. Creswell (2014) bruker tre hovedkategorier; 1) *convergent parallell mixed methods* som er en metodemiksing der begge tilnærminger brukes parallelt og i tett samspill, 2) *explanatory sequential mixed methods* som er en kvantitativ tilnærming etterfulgt av en kvalitativ, og 3) *exploratory sequential mixed methods* som bruker to adskilte tilnærminger i motsatt rekkefølge av den forrige, først en kvalitativ, så en kvantitativ. Av disse tre er det den første som er nærmest i å beskrive metodeblandingen i denne oppgaven, men likevel ikke nær nok til at jeg kan hevde med tyngde at dette er et «convergent parallell mixed methods-design». Med det kvaliative aspektet så integrert i en kvantitativ metode som vi skal se her, nøyer jeg meg med å kalle metodene blandet i ordets rette forstand, men paradoksalt nok for godt blandet til å påklistre en mixed methods-merkelapp, da jeg tolker metodelitteraturen i retning av at mixed methods handler om *adskilte* metoder som kombineres eller blandes i varierende grad med forskjellige formål.

Neste spørsmål er da hvilke metoder som blandes i dette prosjektet? TIMSS har et kvantitativt design, og er en spørreundersøkelse med en datainnsamlingsdel som er beskrevet i neste avsnitt, en kodingsdel og en analysedel. Jeg benytter meg av de innsamlede dataene fra TIMSS og har derfor ikke en egen datainnsamlingsdel, men foretar en kodingsdel og en analyse som ikke er en gjentakelse av arbeidet som allerede er gjort, men en mer dyptgående analyse av noen få utvalgte oppgaver. Å kode svar med påfølgende statistiske beregninger, er den kvantitative delen av metoden jeg benytter i denne studien. Kodingen er foretatt etter modell fra TIMSS og er beskrevet senere i dette kapittelet. Deskriptiv statistikk i form av frekvensfordelinger er gjort ved hjelp av SPSS.

Den kvalitative delen, å lete etter algebraisk forståelse eller feiloppfatninger i oppgavesvarene, har visse likhetstrekk med en dokumentanalyse, da jeg vil lete etter respondentenes tanker i et skrevet materiale som under tvil kan betraktes som et dokument ifølge den nokså vide definisjonen gitt i Brinkmann og Tanggard (2012). Jeg vil imidlertid ikke hevde at det er en dokumentanalyse jeg gjør, for også i dette tilfellet befinner jeg meg i et lite kjent farvann rent metodisk. Jeg har ikke funnet noen veldefinerte kvalitative metoder i litteraturen som beskriver akkurat det jeg gjør, så jeg velger da å kalle det for en mer eller mindre egendefinert metode av kvalitativ natur som kan beskrives med teori fra både dokumentanalyse og teori om diagnostiske oppgaver. Sistnevnte tema beskrives nøye i en masteroppgave av Dahl (2011) som blant annet redegjør for hvordan man konstruerer gode distraktorer i flervalgsoppgaver som har til formål å avsløre feiloppfatninger. Selv om jeg ikke har laget oppgavene i denne studien, er dette nyttig innsikt i analysen av flervalgsoppgavene i algebra fra TIMSS. Å gå dypere inn i teorien til hver av de beslektede metodene, finner jeg lite hensiktsmessig, ikke minst av kapasitetshensyn. Jeg henviser derfor til delkapittelet om fremgangsmåte for videre beskrivelser av metode.

3.2 Om datainnsamling i TIMSS

Datamaterialet som behandles i dette prosjektet er samlet inn gjennom TIMSS-undersøkelsen 2011, og her følger en kort redegjørelse for datainnsamlingsmetoden slik den er beskrevet i kapittel 8 i TIMSS-rapporten «Framgang, men langt fram» (Grønmo et al., 2012):

Populasjonen for den delen av TIMSS-undersøkelsen som er omtalt i denne oppgaven er alle norske elever på 8. trinn bortsett fra to små grupper som er definert ut; nyinnflyttede innvandrere som vil ha problemer med å forstå oppgavene av språklige årsaker, og elever med så store funksjonshemninger at testen ikke kan gjennomføres på en meningsfull måte. Av populasjonen er det trukket ut et utvalg på 3862 elever fra 134 skoler. Alle disse elevene får ikke de samme oppgavene. For å dekke mest mulig av læreplanen er det laget et antall oppgaver som fordeles på 14 forskjellige oppgavehefter, men på en slik måte at en av to blokker med matematikkoppgaver i et hefte også opptrer i neste hefte, mens den andre blokken opptrer i foregående hefte. Dette betyr at hver elev blir testet i omtrentlig en syvendedel av oppgavene. I hver klasse blir det delt ut ett til to (avhengig av antall elever) av hvert hefte, slik at alle de forskjellige oppgavene blir delt ut i hver klasse. Denne måten å fordele oppgaver på har den praktiske fordelen at elever som sitter nær hverandre sannsynligvis har ulike oppgaver, hvilket minsker sjansen for «ulovlig samarbeid». Det viste seg at inndelingen i hefter gav meg en praktisk fordel i min studie også, da jeg har valgt å ta for meg oppgaver fra ett hefte (begrunnelse for det følger senere i metodekapittelet). Dette gjør at jeg automatisk får et tilfeldig utvalg (sannsynlighetsutvalg) fra populasjonen, men et mer håndterlig antall besvarelser på 1/14 av alle som er samlet inn. Et sannsynlighetsutvalg gir også mulighet for å generalisere til hele populasjonen hvis utvalget er stort nok (Kleven, Hjardemaal & Tveit, 2011), og med 277 besvarelser vil dette til en viss grad være tilfelle i denne studien.

3.3 Kodingssystemet i TIMSS' scoringsguide

Dette avsnittet tar for seg kodingssystemet i TIMSS slik det er beskrevet i TIMSS scoringsguide. Foruten en generell beskrivelse av kodingssystemet inneholder scoringsguiden kriterier for de forskjellige kodene for alle oppgaver i TIMSS 2011. Da mange av disse oppgavene ikke er offentlig frigjorte fordi oppgavene skal brukes om igjen for å påvise trender over tid, er ikke scoringsguiden offentlig tilgjengelig, og er derfor ikke oppført i litteraturlista. Det følgende er en kort gjengivelse av den generelle delen av scoringsguiden:

De såkalte constructed response (open-ended) oppgavene i TIMSS gir ett eller to poeng avhengig av oppgavens kompleksitet og omfang. En to-poengsoppgave kan være en oppgave som er todelt og som derfor naturlig gir ett poeng til hver del, eller den kan være mer omfattende, mer kompleks eller ha høyere vanskelighetsgrad enn en ett-poengsoppgave. For å kode svarene benyttes et tosifret kodingssystem der det første sifferet angir om svaret skal belønnes med ett eller to poeng (henholdsvis 1 eller 2), om svaret er feil (7) eller om oppgaven ikke er besvart (9). Det andre sifferet angir en differensiering av svarene for diagnostiske formål slik at et topoengssvar kan kodes med både 20 og 21 hvis oppgaven kan besvares riktig på flere måter, 10 eller 11 hvis svaret er delvis riktig og kan besvares delvis riktig på to forskjellige måter, mens ved feilsvar kan 70, 71, 72 osv benyttes hvis det finnes forskjellige feiltolkninger eller vanlige feilsvar knyttet til en bestemt oppgave. Konvensjonen er å benytte koden 79 til kategorien «øvrige feilsvar» samt svar som er klusset over, mens koden 99 brukes til blanke svar. I tillegg skilles det mellom blanke svar som er «omitted» eller «not reached», der førstnevnte er oppgaver eleven etter eget valg har unnlatt å svare på, mens sistnevnte brukes når de siste oppgavene i en besvarelse er blanke slik at det kan se ut som om eleven ikke har rukket gjennom oppgavene. Imidlertid er andelen av «not reached» som oftest svært lav, og gjelder stort sett oppgaver som kommer langt bak i heftet. Jeg har i mitt arbeid valgt å se bort fra denne distinksjonen, da «not reached»-kategorien uansett er forbundet med usikkerhet fordi vi antar at de ikke er rukket uten å vite det sikkert.

3.4 Fremgangsmåte

Dette delkapittelet beskriver de forskjellige fasene av masteroppgaven, hvordan de ble utført og begrunnelser for hvorfor de ble utført som de ble.

Prosjektets første fase var utvelgelse av TIMSS-oppgaver som skulle analyseres. Jeg plukket først ut 24 constructed response-oppgaver i algebra fra de 14 forskjellige oppgaveheftene som ble benyttet i TIMSS 2011. Grunnet de begrensninger en masteroppgaves omfang gir, måtte jeg så velge ut et passende antall oppgaver for videre forskning. Som et hjelpemiddel til denne utvelgelsen fikk jeg tilgang til et uttrekk fra SPSS som viste resultatene som allerede var utarbeidet fra TIMSS 2011. Av disse var jeg interessert i forholdet mellom andelen riktige, gale og blanke besvarelser for hver av de 24 oppgavene. Jeg utarbeidet så kriterier for hvilke karakteristikker en oppgave burda ha for å passe best mulig til studiens formål. På dette tidlige stadiet i prosjektet var innfallsvinkelen og problemstillingen en litt annen enn hva den endte opp med å bli, så kriteriene var til en viss grad preget av at jeg kun lette etter feiloppfatninger, framfor et mer helhetlig bilde av elevenes algebraisk forståelse, eller mangel på forståelse. Da jeg senere valgte å justere innfallsvinkelen måtte jeg ta en vurdering på om det representerte en trussel mot validiteten at oppgavene ble valgt ut ifra kriterier som var tilpasset den opprinnelige innfallsvinkelen. Min vurdering ble at de oppgavene som ble valgt var egnet til både det opprinnelige og det nåværende formålet, da det som regel vil være en sammenheng mellom tilstedeværelse/ fravær av feiloppfatninger og fravær/ tilstedeværelse av algebraisk forståelse. Samtidig var søket etter feiloppfatninger høyst relevant for den nye innfallsvinkelen, så kriteriene ble stående i sin opprinnelige form:

- Oppgavene bør spørre etter elevens begrunnelse av svaret/ utregning.

- Oppgavene bør ha en høy andel feilsvar, men ikke for høy andel blanke svar, da de blanke svarene gir liten innsikt i elevenes tenkemåte og ferdigheter.

- Frigitte oppgaver vil være å foretrekke framfor ikke-frigitte oppgaver, da det vil være en kompliserende faktor om oppgavene ikke kan omtales fritt i denne teksten.

- Oppgavene bør ideelt sett opptre i samme hefte slik at de samme elevene har svart på flest mulig av de aktuelle oppgavene. Dette vil gi meg en mulighet til å se på eventuelle korrelasjoner i svarene.

- Oppgavene bør dekke flest mulig av de algebraiske konseptene.

Det viste seg dessverre å være umulig å finne et utvalg av oppgaver som dekket alle disse kriteriene. For eksempel er det bare en liten andel av TIMSS-oppgavene i algebra som spør etter begrunnelse eller utregning, og av de frigitte oppgavene gjaldt dette kun én. For å få dekket alle de relevante algebraiske konseptene, måtte jeg også ta med oppgaver med relativt høye andeler blanke svar. Jeg endte opp med å velge algebraoppgavene i hefte 1. Å holde seg til ett hefte har to fordeler, for det første får jeg et håndterlig antall besvarelser som utgjør omtrent 1/14 av det totale antall på mer enn 3800, og da alle hefter blir delt ut i alle klasser vil jeg fremdeles ha et tilfeldig utvalg av populasjonen norske elever på 8. trinn. For det andre vil det nest siste kriteriet ovenfor være oppfylt ved at alle oppgavene blir besvart av de samme elevene. I tillegg er alle algebraoppgavene i hefte 1 frigjorte slik at også det tredje kriteriet er oppfylt. For å få dekket så mange konsepter som mulig, og fordi det er relativt få constructed response-oppgaver i ett hefte, valgte jeg også å ta med flervalgsoppgavene i algebra fra hefte 1. Selv om vi ikke får den samme informasjonen ut av enkeltsvarene, vil helheten kunne gi oss et bilde av algebrakunnskapene til elevene som har svart. Da distraktorene i flervalgsoppgavene er konstruert for å dekke vanlige misoppfatninger, vil slike kunne avsløres ved at disse alternativene får en høy oppslutning i forhold til det riktige alternativet eller i forhold til forventningsverdien ved tilfeldig gjetting.

Neste fase av prosjektet var å gå gjennom samtlige 277 besvarelser på algebraoppgavene fra hefte 1 som jeg hadde tilgang til digitalt, da besvarelsene blir scannet under gjennomføringen av TIMSS 2011. Hver besvarelse er utstyrt med et identifikasjonsnummer som inneholder informasjon om skole, klasse og nummer på elev. Disse byttet jeg ut med tall fra 1 til 277 for å sikre størst mulig grad av anonymitet. Hver gang jeg kom over et svar som ikke var registrert tidligere, skrev jeg ned dette svaret, samt eventuell begrunnelse/utregning. Hvis det var mulig å identifisere elevens tankemåte ut ifra dette, ble den notert sammen med svaret. Denne prosessen var tidkrevende i begynnelsen da de fleste besvarelsene ble notert ned og analysert. Ettersom andelen av gjennomgåtte besvarelser økte, steg også hastigheten på arbeidet fordi stadig flere av svarene var sammenfallende med tidligere svar slik at de ikke måtte skrives ned eller analyseres, men nummeret på besvarelsen ble notert sammen med de som hadde sammenfallende svar. Parallelt med denne økningen i hastighet foregikk en dreining av type tilnærming til denne fasen av prosjektet fra et klart kvalitativt preg i begynnelsen til et mer kvantitativt preg mot slutten.

Så fulgte en fase med koding av besvarelsene. De forskjellige kodene ble ikke fastsatt før etter at besvarelsene var gjennomgått da jeg først trengte en oversikt over hvilke feilsvar som gjentok seg, og som dermed kvalifiserte til å få en egen kode. Kodene ble definert slik at det andre sifferet som differensierer svarene til diagnostiske formål, ble ordnet i stigende rekkefølge. For eksempel ble lave tall som 7**0** og 7**1** benyttet der man kunne spore høyest grad av algebraisk forståelse i henhold til teorien i kapittel 2, mens høyere tall som 7**9** ble benyttet til øvrige feilsvar uten identifiserbare spor av algebraisk forståelse. Jeg foretok noen små endringer fra konvensjonene i TIMSS scoringsguide der jeg så at dette var hensiktsmessig for studiens formål, som på flere måter avviker noe fra formålet med TIMSS-undersøkelsen. Disse endringene er redegjort for og begrunnet i avsnitt 4.1 hvor definisjonen på kodene er presentert. Da alle koder var definert ble de matet inn i SPSS slik at tallmaterialet kunne behandles statistisk.

Den siste fasen av prosjektets forskningsdel besto i å fremskaffe frekvensanalyser av besvarelsene ved hjelp av SPSS, etterfulgt av tolkninger og beskrivelse av funn som i sin tur ledet opp til en konklusjon.

3.5 Validitet og reliabilitet

Jeg vil i det følgende redegjøre for hvordan validitet og reliabilitet ivaretas i oppgaven, og si noe om hvilke validitetstrusler og reliabilitetstrusler som må tas hensyn til. Jeg synes det er vanskelig å behandle disse to begrepene helt separat, da de ofte opptrer sammenfiltret og ikke uavhengige av hverandre i forskning. «It is suggested that reliability is a necessary but insufficient condition for validity, and validity may be a sufficient but not necessary condition for reliability» (Cohen et al., 2011, s. 179). Jeg velger å vurdere validiteten etter prinsippet «How might you be wrong?» eller «Why should we believe you?» fra Maxwell (2005) som i utgangspunktet omtaler validitet i kvalitative studier, men som etter min mening også kan anvendes i andre typer forskning, da disse spørsmålene bør kunne stilles til enhver forsker uavhengig av metode. Validitet kan også sees på som i hvilken grad vi måler det vi ønsker å måle i forskningen vår, i dette tilfellet algebraisk forståelse, mens reliabilitet handler om målingens nøyaktighet. Dette prosjektet er et eksempel på forskning der validitet og reliabilitet er sammenfiltret. Algebraisk forståelse måles her på en måte som gjør nøyaktighet til en utfordring. Med dette menes at jeg både ser etter grader av forståelse og fravær av forståelse i feilsvarene, hvilket vanskelig lar seg måle nøyaktig på en skala. Jeg har forsøkt å operasjonalisere algebraisk forståelse ved å definere feilsvarskategoriene fra noen til ingen grad av algebraisk forståelse, men vi kommer ikke utenom at det er mitt skjønn framfor nøyaktige tall som plasserer de ulike kodene på en «tenkt forståelsesskala», og hvis nøyaktigheten på denne måten kan gjøres til gjenstand for diskusjon, kan det virke inn på validiteten, jf sitatet ovenfor som sier at reliabiliteten kan være en nødvendig (men ikke tilstrekkelig) betingelse for validiteten. Spørsmålet Maxwell stiller om hvordan jeg kan ta feil, kan dermed besvares med at mine konklusjoner kan være uriktige hvis de begrepene jeg måler viser seg å være unøyaktig eller feilaktig målt.

En validitetstrussel man bør være oppmerksom på i alle forskningsprosjekter, men kanskje spesielt i kvalitative tilnærminger der skjønnsmessige vurderinger ofte påvirker konklusjonen, er *forskerbias*. Denne studien har en del tallmateriale som taler for seg, men også tolkninger, betraktinger og slutninger som er av kvalitativ natur, og som derfor bør sees på med et kritisk blikk. Et spørsmål som vil være naturlig å stille for en kritisk leser, knytter seg til det faktum at denne oppgaven er skrevet under veiledning fra noen av de samme forskerne som skriver TIMSS-rapportene, og som naturlig nok har en oppfatning om de temaene jeg forsker på. Spørsmålet blir da om konklusjonen er gitt på forhånd fordi jeg som forsker er påvirket av mine veiledere og derfor er forutinntatt? En vanlig strategi for å motvirke bias er ifølge Ary, Walker og Jacobs (2014) «reflexivity», som kan beskrives som selvrefleksjon med det formål å identifisere egen bias og korrigere den. I denne oppgaven har jeg forsøkt å motvirke bias ved bevissthet i drøftnings- og konkluderingsfasen, og stadig minnet meg selv på Maxwell (2005) sin formaning, «hvordan kan jeg ta feil?».

Det er også relevant for dette prosjektet å se hvordan validitet og reliabilitet omtales i forbindelse med TIMSS- undersøkelsen. I TIMSS scoringsguide behandles heller ikke de to begrepene adskilt. Validitet og reliabilitet forstås her som konsistens i scoringen. Tilsvarende vil trusler mot validitet og reliabilitet oppstå hvis scoringskriteriene tolkes forskjellig slik at to like svar gis forskjellig score av to forskjellige scorere. Konsistens sikres ved at

- Eleven bare blir kreditert for svar som er relevante i forhold til oppgaven, ikke for matematikkunnskaper som kommer til syne i irrelevante tilleggsopplysninger.
- Scorer ikke antar at eleven forstår oppgaven hvis oppgaven bare delvis er besvart, selv om man kan danne seg et bilde av elevens forståelse gjennom flere oppgaver.
- Scorer ser bort ifra irrelevante eller feilaktige tilleggsopplysninger hvis oppgaven ellers er korrekt besvart, med mindre slike opplysninger avslører en så alvorlig mangel på forståelse at det riktige svaret sees bort ifra.

Det understrekes videre at tolkninger likevel kan være forskjellige og at det ikke er mulig å sikre 100% konsistens. Ifølge Torgeir Onstad (personlig kommunikasjon, 28.02.2014) etterstrebes reliabilitet (i form av konsistens i scoringer) på mange nivåer. En scorer må sørge for at de siste besvarelsene vurderes likt som de første, slik at man ikke «firer på kravene» eller vurderer de siste strengere for å «utligne» eventuell godvilje man kan ha vist på foregående besvarelser. Reliabilitet mellom forskjellige scorere må sikres ved at alle følger de fastsatte kriteriene. Tilsvarende må reliabilitet mellom deltakerlandene sikres ved at alle land er enige om kriteriene, slik at sammenligninger er mulige. Likevel kan forskjeller i lands skolekultur eller holdninger knyttet til hvordan landet ønsker å framstå internasjonalt, være med på å true denne reliabiliteten.

I denne oppgaven vil også reliabilitet være avhengig av konsistens i scoringen. Imidlertid vil mine kriterier avvike noe fra TIMSS' nevnt ovenfor på grunn av forskjellige formål. For eksempel vil jeg måtte ta med algebrakunnskaper som fremkommer i ellers irrelevante tilleggsopplysninger når jeg skal gi en helhetlig vurdering av norske elevers algebrakunnskaper.

Et annet aspekt som kan ha betydning for validitet og reliabilitet er elevenes innsats og holdning til prøvesituasjonen. Innen «prøve-terminologien» kalles det for *high stakes* hvis prøveresultatet er viktig for elev, lærer, skoleledelse eller myndigheter (Amrein & Berliner, 2002). I motsatt fall kaller vi det «*low stakes*». Når det gjelder TIMSS-undersøkelsen kan det sies at den er *high stakes* for den øvre delen av skolehierarkiet, det er viktig for myndighetene at landet oppnår resultater som tåler sammenligning med andre land, og viktig for skoleledelsen at skolen bidrar positivt til de nasjonale resultatene. For elevene derimot, er situasjonen annerledes. Besvarelsene har ingen personlig konsekvens for dem, og selv om det ser ut som om de fleste har svart samvittighetsfullt, har vi ingen mulighet til å vite hva som ligger bak de blanke besvarelsene, eller hvor mye innsats som er lagt ned i de besvarelsene der det er mye feil. Det er ikke helt utenkelig at noen ser på testen som en fritime, der de enten underpresterer eller svarer blankt uten å se på oppgavene. Dette betyr at det kan være mer algebrakunnskaper i norske elever enn det som kommer fram i resultatene, noe som vil kunne skade validiteten av forskningen, og i ytterste konsekvens føre til at det blir trukket feilaktige konklusjoner, men på den annen side har vi ikke noen grunn til å tro at slike mørketall er spesielt høye, eller at de ville gjort store utslag på resultatene.

En reliabilitetstrussel kan være unøyaktighet eller slurv i en eller flere ledd av prosessen det er å notere ned feilsvar, kode og mate data inn i SPSS. Denne trusselen har jeg forsøkt å minimalisere ved å være fokusert og konsentrert under arbeidet, etterstrebe størst mulig nøyaktighet, og foreta kontroller under hvert steg. Et totalt fravær av feil eller unøyaktigheter kan naturligvis ikke garanteres, men det er usannsynlig at eventuelle feil vil være så omfattende eller hyppige at gyldigheten av konklusjonen i oppgaven trues.

3.6 Oppgavene

Her følger en beskrivelse av TIMSS-oppgavene som studeres i dette prosjektet. Jeg har valgt å beholde oppgavenummeret oppgavene har i hefte 1:

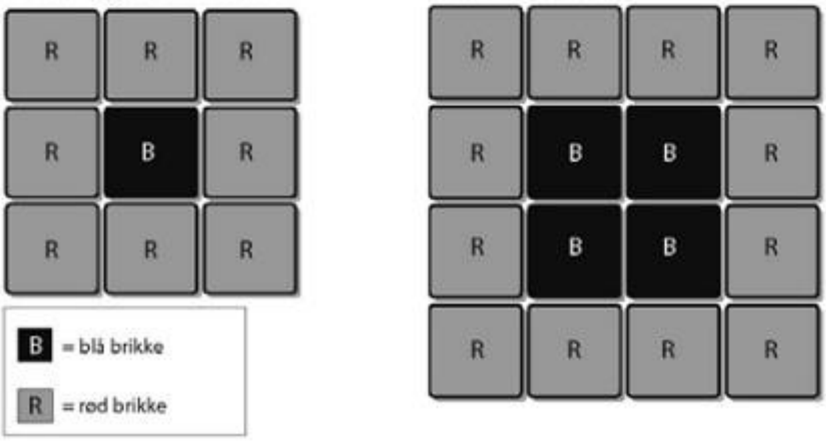
Oppgave 3 – 5 henger sammen og handler om å lage kvadratiske mønstre av røde og blå brikker der de blå brikkene danner et kvadrat, og de røde brikkene danner rammen rundt. Selv om alle disse sorterer under algebra på TIMSS' hjemmeside der oppgavene er offentliggjort (IEA, 2012), er det bare oppgave 5 som kan regnes som en ren algebraoppgave. De foregående går ut på å fylle ut en tabell med antall blå, antall røde og totalt antall brikker for $n \times n$ kvadrater fra $n = 3$ og oppover ($n < 3$ vil ikke gi noen blå brikker), og krever en eller flere av disse ferdighetene: logisk tenkning, geometrisk forståelse, tallforståelse og gjenkjenning av mønstre. Dette er oppgaver i prealgebra, som beskrevet i kapittel 2.2. Et interessant poeng med disse tre oppgavene er at de starter med prealgebra, men leder opp til en ren algebraoppgave der mønstrene skal generaliseres med algebraiske uttrykk.

Oppgave 3

Petter har røde og blå brikker. Av disse lager han kvadratiske figurer.

3×3-figuren har 1 blå brikke og 8 røde brikker

4×4-figuren har 4 blå brikker og 12 røde brikker



Tabellen nedenfor viser antall brikker i de tre første figurene som Petter lagde. Han fortsetter å lage figurer etter det samme mønsteret. Gjør ferdig tabellen for 6×6- og 7×7-figurene.

Figur	Antall blå brikker	Antall røde brikker	Totalt antall brikker
3 × 3	1	8	9
4 × 4	4	12	16
5 × 5	9	16	25
6 × 6	16		
7 × 7	25		

Figur 2: Oppgave 3

Denne oppgaven går ut på å fylle ut fire ruter i nevnte tabell der en kolonne skal inneholde antall røde brikker for 4×4 og 5×5 – kvadrater, mens den andre skal inneholde totalt antall brikker for de to samme kvadratene. Det er flere måter å angripe denne oppgaven på, avhengig av hvilke av de ovenfornevnte egenskapene som er mest fremtredende hos eleven. Man kan betrakte kvadratene geometrisk, eventuelt tegne opp og telle brikker, man kan betrakte kolonnene og se at antall røde brikker følger tallene i 4-gangen, slik at 8, 12 og 16 etterfølges av 20 og 24, mens det totale antall brikker nødvendigvis må være kvadrattall, slik at 9, 16 og 25 etterfølges av 36 og 49, eller man kan betrakte radene og se at det totale antall brikker er summen av blå og røde. Riktige svar her blir altså 20 og 24 i første kolonne, og 36 og 49 i andre kolonne.

Oppgave 4

Bruk mønstrene i tabellen foran til å svare på spørsmålene nedenfor.

A. Petter lagde en figur med **til sammen** 64 brikker. Hvor mange blå brikker og hvor mange røde brikker brukte Petter i denne figuren?

Svar: ____________ blå brikker ____________ røde brikker

B. Petter lagde også en figur som hadde 49 **blå** brikker.
Hvor mange **røde** brikker brukte Petter i denne figuren?

Svar: ____________ røde brikker

C. Så lagde Petter en figur som hadde 44 **røde** brikker. Hvor mange blå brikker trenger Petter for å gjøre ferdig den blå delen av figuren?

Svar: ____________ blå brikker

Figur 3: Oppgave 4

Denne tredelte oppgaven er en fortsettelse av oppgave 3, og lar seg lettest løse om man tar seg tid til å utvide tabellen til å gjelde til og med $n = 12$. I deloppgave a) skal man finne antall blå og rød brikker når totalen er 64, her er riktig svar 36 blå og 28 røde. I b) skal man finne antall røde brikker når antall blå er 49. Dette blir et 9×9 –kvadrat med 32 røde brikker. I c) skal man finne antall blå brikker når antall røde er oppgitt til 44. Dette blir et 12×12 –kvadrat med 100 blå brikker. De som utvider tabellen korrekt kan lese alle svarene rett ut av tabellen. Hvis man ikke har utvidet tabellen, må man regne, resonnere eller tegne seg frem til svaret, men dette krever en god forståelse for de kvadratiske figurenes karakter.

Oppgave 5

Petter ønsket å legge til en linje i tabellen, slik at han visste hvor mange brikker han ville trenge for å lage hvilken som helst figur med dette mønsteret. Bruk mønstrene i tabellen på forrige side som hjelp. Gjør ferdig tabellen nedenfor for figur $n \times n$.

Figur	Antall blå brikker	Antall røde brikker	Totalt antall brikker
$n \times n$	$(n-2)^2$		

Nå er det ingen flere oppgaver om Røde og blå brikker.

Figur 4: Oppgave 5

I denne oppgaven skal tabellen utvides med en linje for en generell $n \times n$ figur, altså en generalisering av de første oppgavene. Her blir det totale antall brikker $n \times n$ eller n^2 mens antall røde brikker kan skrives enten som en differanse mellom totalt antall og det oppgitte uttrykket for blå brikker, $n \times n - (n-2)^2$, eller som summen av fire sidekanter minus fire hjørner som har blitt talt fire ganger, $4n - 4$ eller ekvivalent. Denne oppgaven krever god forståelse av generaliseringskonseptet i algebra, samt visse ferdigheter i å manipulere algebraiske uttrykk.

Oppgave 9

Hvis t er et tall mellom 6 og 9, mellom hvilke to tall ligger $t + 5$?

Ⓐ 1 og 4

Ⓑ 10 og 13

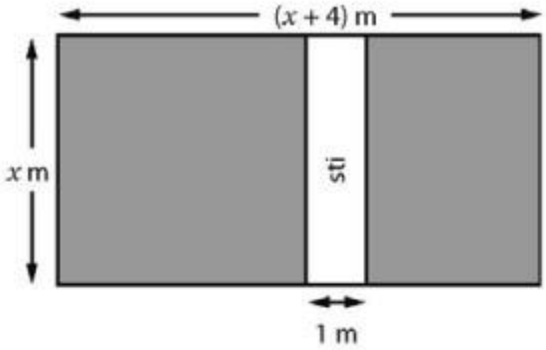
Ⓒ 11 og 14

Ⓓ 30 og 45

Figur 5: Oppgave 9

Dette er en flervalgsoppgave som spør etter hvilke to tall $t + 5$ ligger mellom når t er et tall mellom 6 og 9. Problemet krever forståelse av at en bokstav kan ha en tallverdi, samt en forståelse av intervaller. Eleven må forstå at mellom ikke betyr det samme som fra og med - til og med. Hvis man setter inn 6 og 9 for t ser man at $t + 5$ blir 11 og 14, slik at $t + 5$ ligger mellom disse to tallene. Dette gir at svaralternativ C er korrekt.

Oppgave 15



Dette er en hage formet som et rektangel.

Det hvite området er en sti med form som et rektangel. Stien er 1 m bred.

Hvilket uttrykk viser arealet av den gråfargede delen av hagen i m^2?

Ⓐ $x^2 + 3x$

Ⓑ $x^2 + 4x$

Ⓒ $x^2 + 4x - 1$

Ⓓ $x^2 + 3x - 1$

Figur 6: Oppgave 15

Dette er en multippel choice- oppgave som går ut på å finne arealet av det skraverte området uttrykt ved x. Dette er i utgangspunktet et geometrisk problem, men siden lengdene på figuren er uttrykt ved x, kreves ferdigheter i å utføre aritmetiske regneoperasjoner med bokstavuttrykk for å løse oppgaven. Løsningen finnes ved å subtrahere arealet av stien, $1 \cdot x$, fra arealet av den rektangulære plenen, $x(x + 4)$, som gir svaralternativ A: $x^2 + 3x$.

Oppgave 16

$$y = \frac{a+b}{c}$$

$a = 8$, $b = 6$ og $c = 2$

Hva er verdien til y?

Ⓐ 7

Ⓑ 10

Ⓒ 11

Ⓓ 14

Figur 7: Oppgave 16

Denne flervalgsoppgaven går ut på å sette inn noen oppgitte verdier for bokstavene a, b og c for å regne ut verdien av y. Krever ikke annen algebraisk forståelse enn å innse at bokstaver kan ha numeriske verdier, resten er ren aritmetikk; addisjon, divisjon, regnerekkefølge. Riktig svaralternativ er A: 7.

Oppgave 17

Et trestykke var 40 cm langt.

Det ble delt i 3 deler.

Lengdene (målt i cm) er

$2x - 5$

$x + 7$

$x + 6$

Hvor lang er den lengste delen?

Svar: ______________ cm

Vis framgangsmåten din (også om du bruker kalkulator).

Figur 8: Oppgave 17

Dette er en oppgave som tester elevene i to sentrale algebraiske konsepter: Modellering og ligningsløsning. Det finnes alternative måter å resonnere på, men den mest effektive, og mest algebraiske, er å bruke opplysningene i oppgaven til å konstruere ligningen $(2x - 5) + (x + 7) + (x + 6) = 40$, som er ekvivalent med $4x = 32$ som gir $x = 8$. Så evalueres hvert av uttrykkene med denne verdien for x, og vi finner at den lengste trebiten er 15 cm.

Supplerende oppgaver.

Som vi skal se i kapittel 4, var det så få elever som var i stand til å sette opp ligningen i oppgave 17 at jeg fikk svært liten informasjon om ferdigheter i ligningsløsning. Av den grunn har jeg valgt å ta med statistikk fra tre oppgaver i ligningsløsning, men da disse ikke er frigitt kan jeg ikke vise dem her eller beskrive dem eksplisitt. Jeg gir derfor bare en generell beskrivelse av oppgavetypen. Jeg har i tillegg inkludert den ene oppgaven som omhandler ulikheter, denne er frigitt:

Supplerende oppgave 1: Flervalgsoppgave der en lineær ligning er stilt opp, og eleven skal identifisere et av fire alternativer som et riktig steg mot å løse ligningen. Denne oppgaven tester elevenes kunnskaper om den såkalte «flytte-bytte»-regelen.

Supplerende oppgave 2: Constructed response-oppgave. Ligning som inneholder brøker hvor den ukjente er i nevneren. Som ligning har den en relativt høy vanskelighetsgrad, men kan også løses som en oppgave om forholdstall.

Supplerende oppgave 3: Flervalgsoppgave. Lineær ligning der svaret er en uekte brøk. Riktig svaralternativ er oppgitt som blandet tall. Tester elevenes ferdigheter i å dividere bort tallet foran *x*, samt forståelsen av brøk.

Supplerende oppgave 4: Constructed respons- oppgave hvor elevene blir bedt om å løse en lineær ulikhet:

Løs ulikheten.

$9x - 6 < 4x + 4$

Svar: ______________

Figur 9: Oppgave i ulikheter

Korrekt svar på denne oppgaven er $x < 2$.

4 Resultater

Dette kapittelet inneholder beskrivelser av de kodene jeg fant hensiktsmessig å bruke etter gjennomgangen av oppgavene, samt deskriptiv statistikk som blant annet viser frekvensfordelinger for hver av oppgavene.

4.1 Kodinger

Her følger definisjoner på de forskjellige kodene som er benyttet i det utvidede kodingssystemet. Det er foretatt enkelte justeringer fra TIMSS' scoringsguide som blir brukt for å kode besvarelsene i TIMSS i tillegg til at det er definert flere feilsvarskategorier. Endringene er gjort for å tilpasse kodingssystemet til formålet med denne oppgaven. I TIMSS er kodene laget for å score poeng slik at hver besvarelse får en poengsum som bidrar til landsgjennomsnittet for Norge. Kodingssystemet skal også ha en diagnostisk funksjon, men det blir i praksis sjeldent brukt mer enn to feilsvarskategorier. I min studie gir jeg ikke poeng, men ønsker å få mest mulig informasjon ut av feilsvarene. Jeg har derfor ikke differensiert i «korrekt» og «delvis korrekt» på 2-poengsoppgaver som ville gitt henholdsvis 2 og 1 poeng, med samlet alle svar som ikke er helt korrekte i feilsvarskategorier slik at et delvis riktig svar får laveste feilkode, typisk 70. Jeg lar det likevel fremgå av guiden nedenfor hvilke koder som ville gitt 1 poeng i TIMSS. Jeg har også beholdt kode 20, eventuelt 21 for korrekte svar på 2-poengsoppgaver, mens jeg bruker 10, eventuelt 11 på 1-poengsoppgaver for å synliggjøre at 2-poengsoppgavene har større omfang eller kompleksitet.

Jeg har også gjort en endring på en nokså innarbeidet konvensjon i oppgavekoding som kanskje vil gi en viss dissonans i ørene på en erfaren koder, men igjen er dette for å tilpasse til mitt formål. Konvensjonen er at kun helt blanke svar skal ha kode 99. Svar som er klusset over, spørsmålstegn eller andre varianter som ikke er et reelt svar blir i TIMSS plassert i «diverse feilsvar»-kategorien 79. Jeg har valgt å plassere alle slike svar i 99-kategorien slik at denne omfatter alle varianter av ikke-svar som jeg ikke får noen informasjon ut av, annet enn at eleven ikke har produsert et svar. Man kan argumentere for at en oppgave som er klusset over (slik at jeg ikke kan se hva som er skrevet) gir meg informasjon om at denne eleven har forsøkt å svare, og at jeg derfor eventuelt kunne benyttet koden 90 for slike svar, men for meg gir ikke slike svar mer informasjon om elevens kompetanse enn et blankt svar. Et blankt svar kan både indikere at eleven ikke har forstått oppgaven, at eleven ikke ønsker å svare/ forsøke å svare, eller at eleven har en viss kompetanse, og kanskje kladder et godt forsøk på et kladdeark, men kommer ikke helt i mål og derfor velger å la det stå åpent. Poenget er at jeg ikke får denne informasjonen, og at jeg får like lite informasjon om elevens kompetanse fra forsøk som er klusset over eller lignende, som fra blanke svar. Å skille mellom to 90-koder finner jeg derfor unødvendig og lite informativt for mitt formål.

Oppgave 3

20: Korrekt svar. Første rad: 20 og 36, andre rad: 24 og 49.

70: Tre av fire ruter er korrekt utfylt. Den siste ofte en prosedyrefeil (type 2), eleven forstår oppgaven. Tilsvarende kode 10 i TIMSS (ett poeng).

71: En kolonne eller en rad riktig utfylt, men ikke den andre. Eleven har en delvis forståelse av problemet. En riktig rad gir kode 10 i TIMSS (ett poeng).

72: Ingen rader eller kolonner er riktig utfylt, men kolonnen for totalt antall brikker er summen av blå og oppgitte røde brikker. Eleven viser en delvis forståelse for problemet.

73: Rutene er fylt ut etter et bestemt mønster som ikke generer noen rette svar. For eksempel kan forekomsten av tallet 25 to steder på en diagonal i tabellen mislede eleven til å tro at noen tall går igjen i et diagonalt mønster. Eleven viser liten forståelse for problemet.

79: Øvrige feilsvar. Tilsynelatende tilfeldige tall, hvor elevens tankegang vanskelig lar seg identifisere. Viser liten eller ingen forståelse for oppgaven.

99: Blankt svar eller svar som ikke gir noen informasjon om hva eleven tenker utover at han/hun ikke er istand til å løse oppgaven. Inkluderer spørsmålstegn, utsagn som «vet ikke», «forstår ikke» eller forsøk som er klusset over.

Oppgave 4 a)

20: Korrekt svar. 36 blå og 28 røde.

70: 36 blå *eller* 28 rød, eller 28 blå *og* 36 rød (riktige antall men til feil farge). Tyder på en viss forståelse for oppgaven, mulighet for prosedyrefeil (type 2). En rett gir kode 10 i TIMSS, scoringsguide (ett poeng).

71: Feil tall, men summen av blå og røde brikker blir 64. I tillegg er enten antall blå et kvadrattall, eller antall rød et multippel av fire. Forholdet mellom blå og røde brikker må være slik at det ene antallet ikke overskrider det dobbelte av det andre antallet. Disse kriteriene kan tyde på en viss forståelse av oppgaven. Eksempler: 25 og 39, 32 og 32 eller 40 og 24.

72: Et eller flere av kriteriene for kode 71 er ikke oppfylt. Summen av blå og røde brikker må være 64. Et slikt svar tyder på en begrenset, men ikke helt fraværende forståelse av oppgaven. Eksempler: 10 og 54, 46 og 18.

79: To gale svar som ikke summerer til 64 og som ikke avslører noen grad av forståelse for oppgaven. Kan være tilfeldig gjetting.

99: Blankt svar eller svar som ikke gir noen informasjon om hva eleven tenker utover at han/hun ikke er istand til å løse oppgaven. Inkluderer spørsmålstegn, utsagn som «vet ikke», «forstår ikke» eller forsøk som er klusset over.

Oppgave 4 b)

10: Korrekt svar. 32 røde brikker.

70: Multippel av 4 som avviker lite fra riktig svar, 24, 28, 36 og 40. Det kan ikke utelukkes at disse er gjettet tilfeldig, men kan også tyde på en forståelse av at antall røde brikker må være et multippel av fire, og dermed en viss grad av forståelse for oppgaven.

71: 15. Eleven antar at summen av blå og røde brikker skal være 64 som i oppgave 4 a). Svaret fremkommer da ved å subtrahere 49 fra 64. Vitner om liten forståelse av oppgaven.

72: Multipler av 49 (antall blå brikker). Eleven har forsøkt å «generere» antall røde brikker ved å bruke det oppgitte antall blå. Vitner om liten eller ingen forståelse av oppgaven. Eksempel: 98, 147.

79: Øvrige feilsvar, inkludert primtall eller oddetall som tyder på lav tallforståelse og liten eller ingen forståelse for oppgaven. Slike svar kan være resultat av tilfeldig gjetting.

99: Blankt svar eller svar som ikke gir noen informasjon om hva eleven tenker utover at han/hun ikke er i stand til å løse oppgaven. Inkluderer spørsmålstegn, utsagn som «vet ikke», «forstår ikke» eller forsøk som er klusset over.

Oppgave 4 c)

10: Korrekt svar. 100 blå brikker.

70: Et kvadrattall som ikke avviker alt for mye fra riktig svar. 64, 81, 121. Ved et slikt svar kan ikke tilfeldig gjetting utelukkes, men det kan også bety at eleven har forstått at svaret må være et kvadrattall av en viss størrelse, noe som vitner om en viss tallforståelse og forståelse for oppgaven.

71: 20. Eleven antar at summen av blå og røde brikker skal være 64 som i oppgave 4 a). Svaret fremkommer da ved å subtrahere 44 fra 64. Vitner om liten forståelse for oppgaven.

72: Et multippel eller en brøkdel av 44 (antall røde brikker), for eksempel 22, 11, 88. Eleven har forsøkt å «generere» antall blå brikker ved å bruke det oppgitte antall røde. Vitner om liten eller ingen forståelse av oppgaven. Eksempel: 22, 11 eller 88

79: Øvrige feilsvar. Eleven viser svak tallforståelse og liten eller ingen forståelse for oppgaven. Slike svar kan være resultat av tilfeldig gjetting.

99: Blankt svar eller svar som ikke gir noen informasjon om hva eleven tenker utover at han/hun ikke er i stand til å løse oppgaven. Inkluderer spørsmålstegn, utsagn som «vet ikke», «forstår ikke» eller forsøk som er klusset over.

Oppgave 5

20: Begge uttrykk riktig i forenklet form:

Røde brikker: $4(n-1)$ eller $4n-4$.

Totalt antall brikker: n^2, $n \times n$ eller ekvivalent svar uttrykt med ord.

21: Røde brikker uttrykt som en differanse mellom totalt antall og blå brikker. Totalt antall brikker som i 20.

70: Et av uttrykkene korrekt som i 20. Eleven viser noen grad av forståelse for generaliseringskonseptet i algebra. Tilsvarende kode 10 og 11 i TIMSS' scoringsguide avhengig av hvilket uttrykk som er rett (ett poeng).

71: Ikke-korrekte uttrykk som inneholder n. Kan tyde på en forståelse for at de generaliserte uttrykkene må inneholde n, men liten forståelse for denne konkrete oppgaven.

72: Røde brikker og totalt antall brikker er uttrykt på en måte som ligner utrykket for blå, slik at de tre uttrykkene danner en følge eller et mønster. Eksempel: $(n-2)^3$ og $(n-2)^4$ eller $(n-3)^2$ og $(n-4)^2$. Kan tyde på en forståelse for at de generaliserte uttrykkene må inneholde n, men liten forståelse for denne konkrete oppgaven, og for algebraiske uttrykk generelt.

79: Røde brikker og/eller totalt antall brikker er oppført som et tall. Viser ingen forståelse for generaliseringskonseptet i algebra. Øvrige feilsvar.

99: Blankt svar eller svar som ikke gir noen informasjon om hva eleven tenker utover at han/hun ikke er i stand til å løse oppgaven. Inkluderer spørsmålstegn, utsagn som «vet ikke», «forstår ikke» eller forsøk som er klusset over.

Oppgave 17

20: Korrekt svar, 15, med algebraisk begrunnelse: Eleven setter opp ligningen $4x + 8 = 40$ og løser den korrekt. Et slikt svar viser forståelse for to konsepter innen algebra; modellering og ligningsløsning.

21: Korrekt svar, 15, med ikke-algebraisk begrunnelse, for eksempel finne $x = 8$ ved å teste forskjellige verdier av x, og finne hvilken verdi som gir summen 40 ved innsetting. Viser god forståelse for oppgaven og god resonneringsevne, men viser ikke ferdigheter i algebra.

70: 8 eller $x = 8$, riktig løsning av ligningen beskrevet i 20, eller indikasjoner på at $x = 8$ i utregningen. Viser forståelse for det algebraiske konseptet ligningsløsning, men en manglede forståelse for helheten i oppgaven. Tilsvarer kode 10 i TIMSS' scoringsguide (ett poeng).

71: $x + 7$ med riktig begrunnelse, det vil si korrekt løst ligning eller et riktig resonnement som gir $x = 8$. Viser forståelse for oppgaven, men manglende algebraferdigheter da verdien for x ikke er satt inn i uttrykket. Dette tilsvarer kode 11 i TIMSS' scoringsguide (ett poeng).

72: 15 eller $x + 7$ uten utregning. Kan her anta at eleven har gjettet, men kan ikke utelukke en forståelse for oppgaven eller algebraen i oppgaven.

73: $2x - 5$, 21 eller 21.6 begrunnet med at $x = 40 : 3$, eller andre feilaktige utregninger som gir $x > 12$. Et slikt svar viser liten forståelse for både modellering og ligningsløsning, men eleven evaluerer uttrykkene korrekt med den verdien for x som er funnet.

74: 13 med en eller flere 3-tall som desimaltall. Eleven har dividert 40 med 3, og viser dermed ingen algebraisk forståelse eller annen forståelse for oppgaven. De algebraiske uttrykkene for lengden av tredelene blir ignorert.

79: Øvrige feilsvar. Tilfeldige gjettinger, svar uten begrunnelse eller andre svar som vitner om liten eller ingen algebraforståelse.

99: Blankt svar eller svar som ikke gir noen informasjon om hva eleven tenker utover at han/hun ikke er i stand til å løse oppgaven. Inkluderer spørsmålstegn, utsagn som «vet ikke», «forstår ikke» eller forsøk som er klusset over.

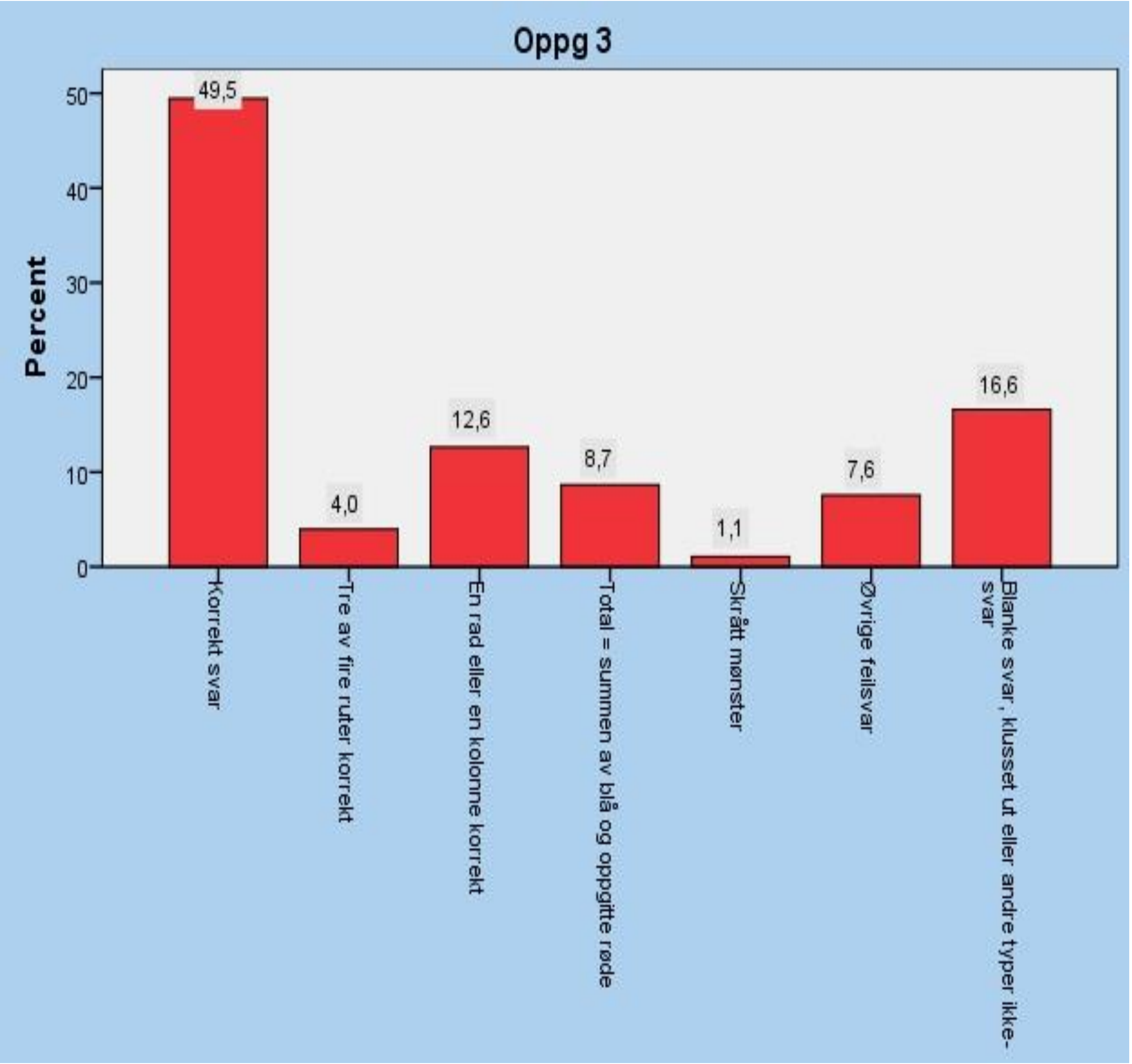
4.2 Statistikk

Her følger frekvensfordelinger for hver av oppgavene. I tillegg har jeg i noen oppgaver oppgitt samtlige forskjellige feilsvar for å synliggjøre hvilke tallområder feilsvarene spenner over, og hvor mange forskjellige feilsvar som forekommer.

4.2.1 Røde og blå brikker

Oppgave 3

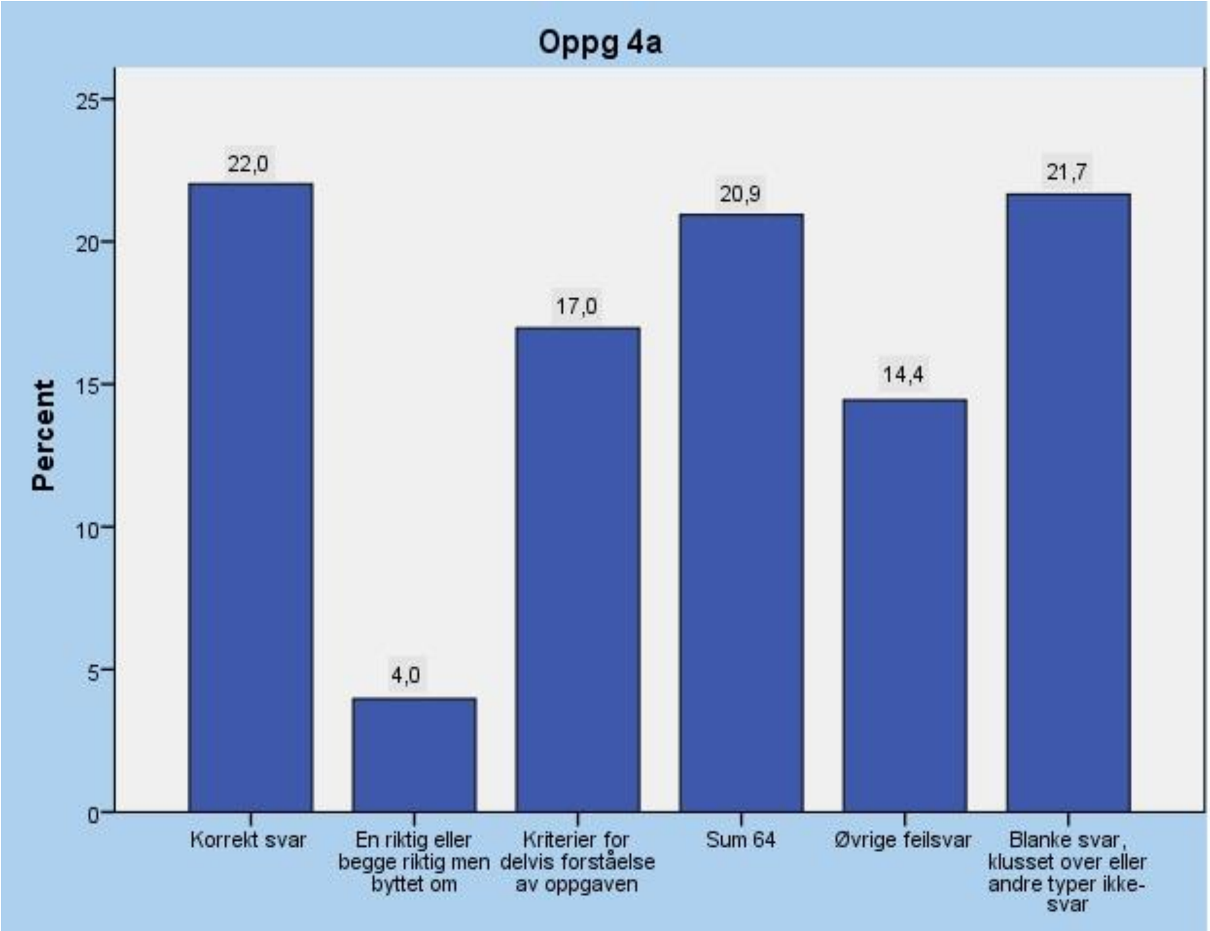
Oppgave 3 gikk ut på å fylle ut fire ruter for å komplettere tabell over blå, røde og totalt antall brikker:



Figur 10: Frekvensfordeling, oppgave 3

Oppgave 4a)

Oppgave 4a) gikk ut på finne antall blå og røde brikker når det totale antallet var 64. Frekvensfordelingen følger på neste side.



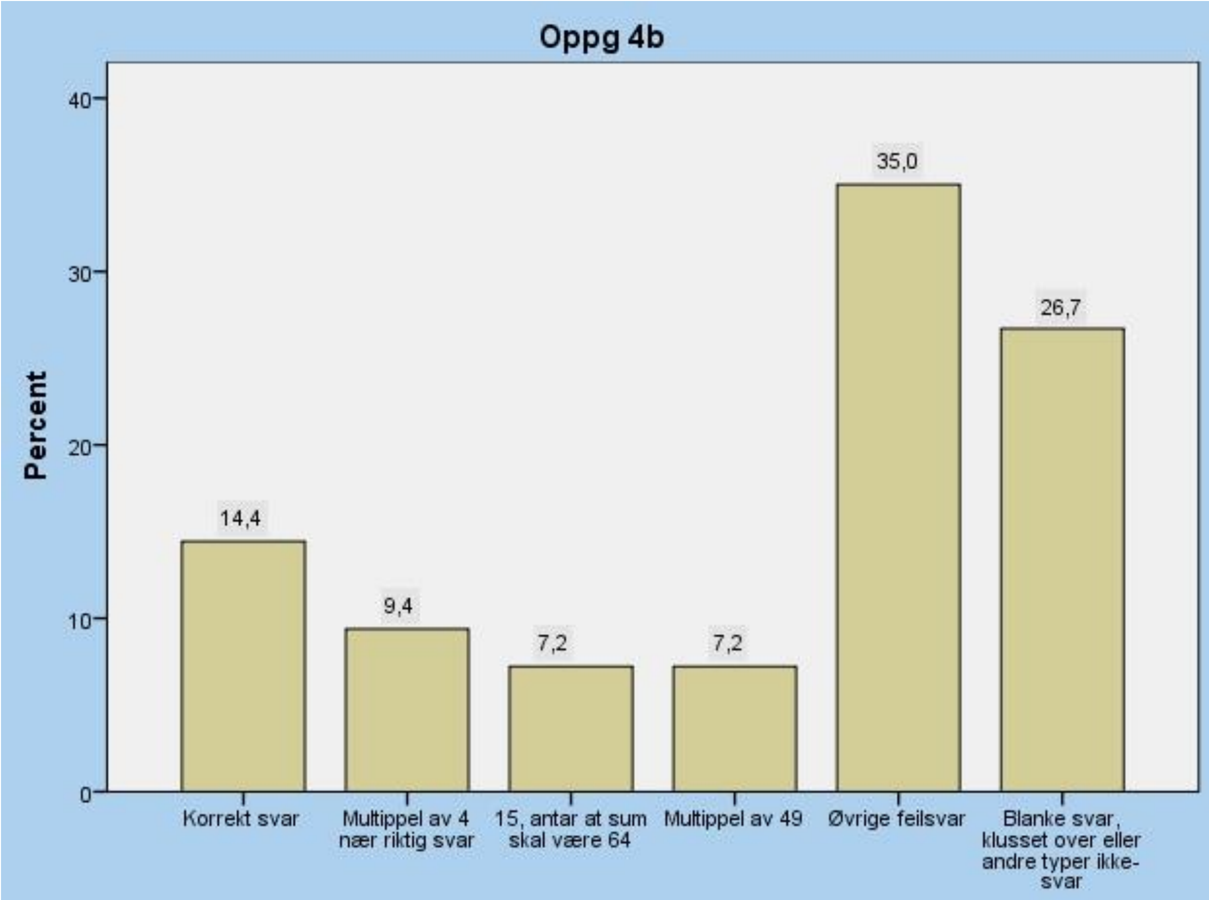
Figur 11: Frekvensfordeling, oppgave 4a

Oppgave 4b)

Oppgave 4b) gikk ut på å finne antall røde brikker når antall blå var 49. Følgende 63 ulike svar ble oppgitt i oppgave 4b). Svarene er ordnet i stigende rekkefølge:

1, 6, 7, 8, 11, 14, 15, 16, 17, 18, 20, 21, 23, 24, 24.5, 25, 28, 29, 30, 31, *32* (riktig svar), 36, 37, 40, 42, 43, 44, 45, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 60, 62, 63, 64, 66, 69, 72, 74, 79, 81, 86, 94, 98, 99, 109, 119, 147, 148, 176, 196, 200, 392, 1000, 2352, 2401.

Frekvensfordeling følger på neste side:



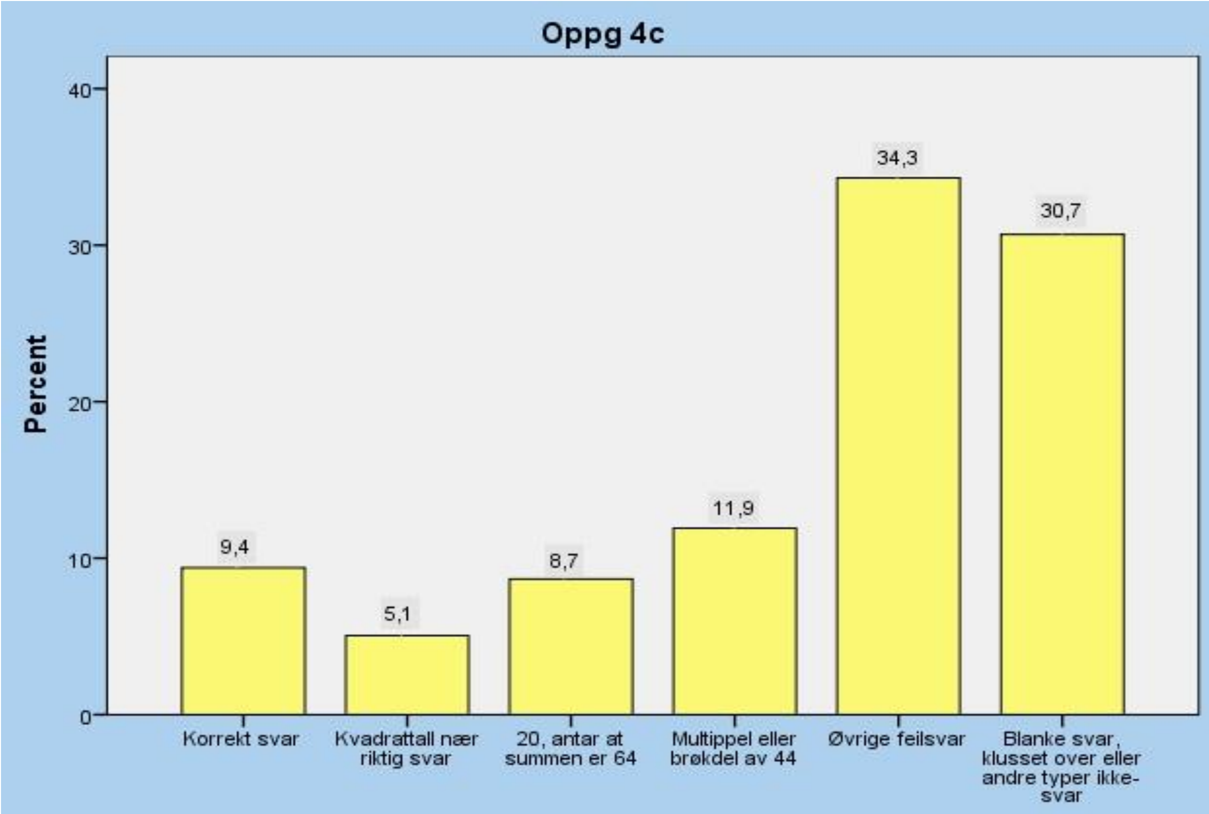
Figur 12: Frekvensfordeling for oppgave 4b

Oppgave 4c)

Oppgave 4c) gikk ut på å finne antall blå brikker når antall røde var 44. Følgende 62 ulike svar ble oppgitt i oppgave 4c). Svarene er ordnet i stigende rekkefølge:

1, 2, 3, 5, 5.5, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 14.666, 15, 16, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 30, 32, 33, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 43, 44, 45, 48, 49, 50, 54, 56, 59, 60, 64, 66, 77, 79, 81, 85, 88, 90, 91, 92, 96, 98, *100* (riktig svar), 121, 125, 132, 400, 2340.

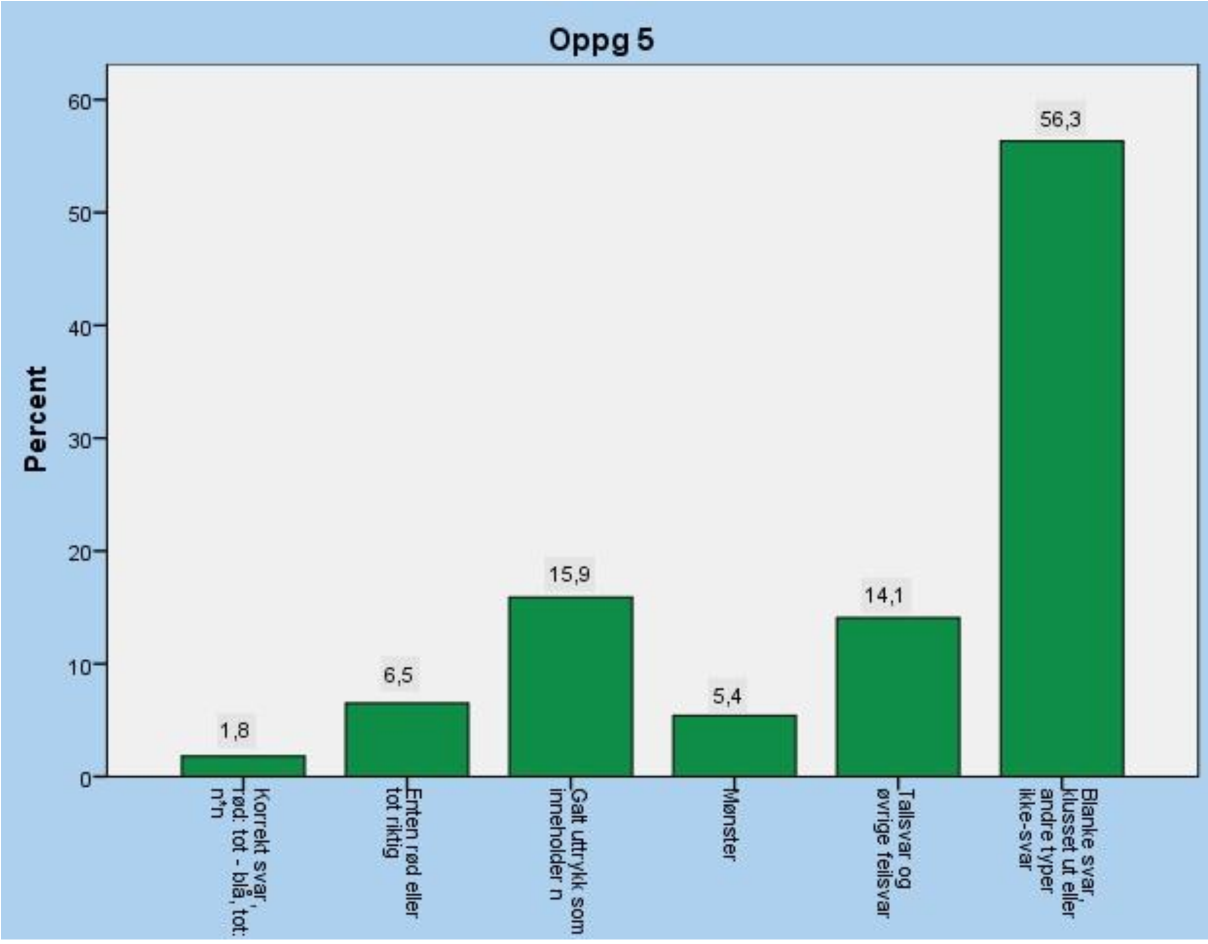
Frekvensfordeling følger på neste side:



Figur 13: Frekvensfordeling for oppgave 4c

Oppgave 5

Oppgave 5 var en generaliseringsoppgave der formålet var å skrive generelle uttrykk for antall røde og totalt antall brikker for figur nummer *n*. Frekvensfordelingen følger på neste side:



Figur 14: Frekvensfordeling for oppgave 5

4.2.2 Flervalgsoppgavene

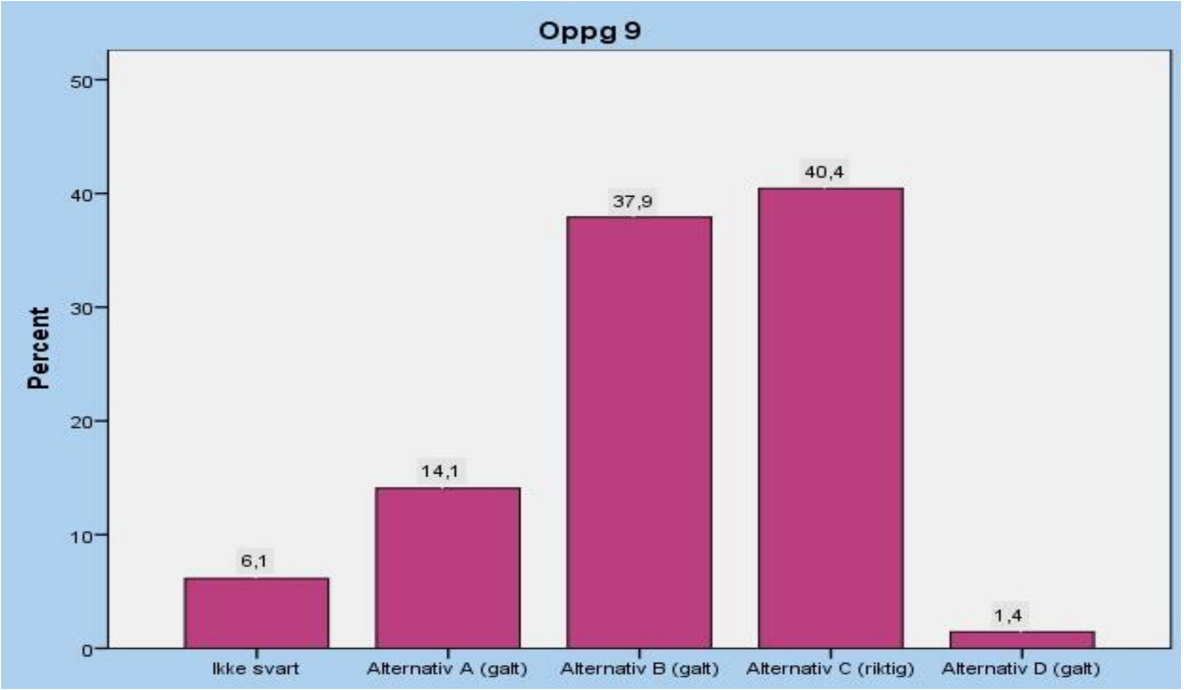
Flervalgsoppgavene omfattet følgende oppgaver:

- **Oppgave 9** var en innsettingsoppgave der formålet var å finne hvilke verdier $t + 5$ befant seg mellom for en

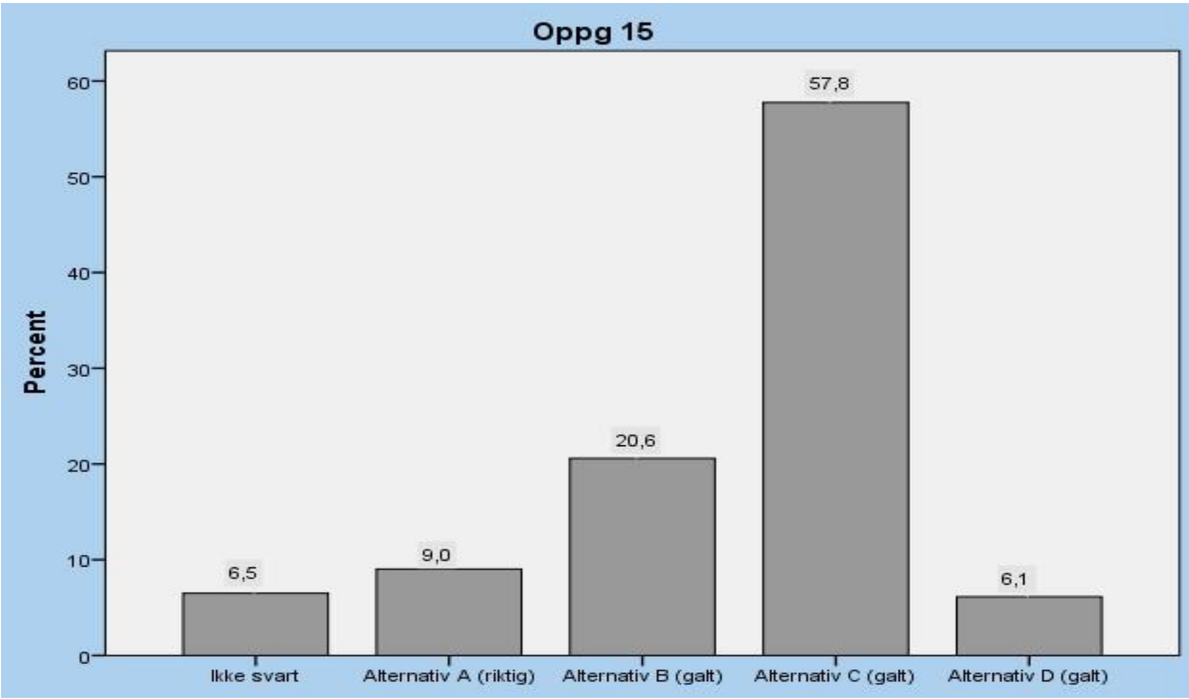
- **Oppgave 15** gikk ut på å regne ut arealet til et skravert område som representerer en rektangulær plen der en ikke-skravert sti må trekkes fra.

- **Oppgave 16** var en innsettingsoppgave der elevene skulle finne verdien av y ved å sette inn verdier for a, b og c i et gitt uttrykk for y.

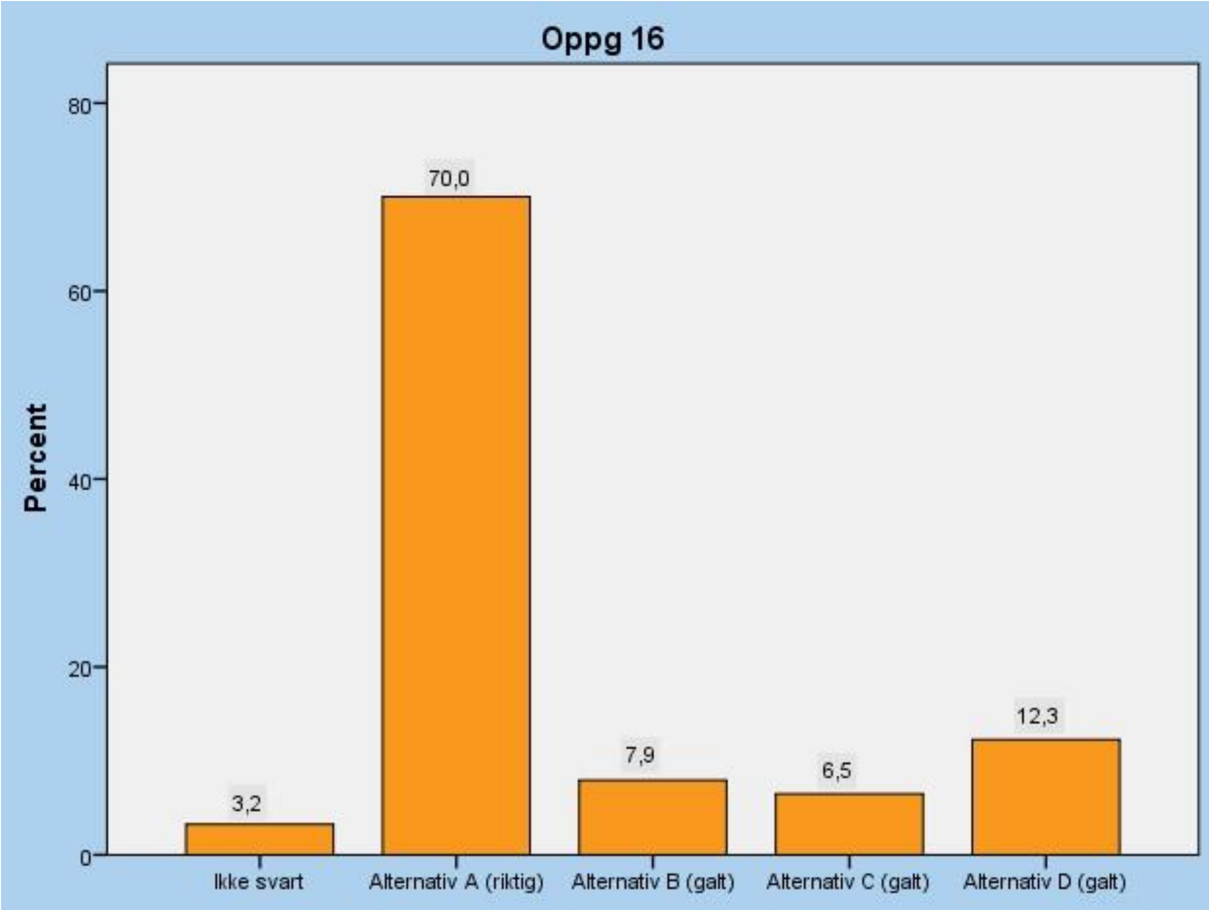
Nedenfor følger frekvensfordeling for disse tre oppgavene:



Figur 15: Frekvensfordeling for oppgave 9



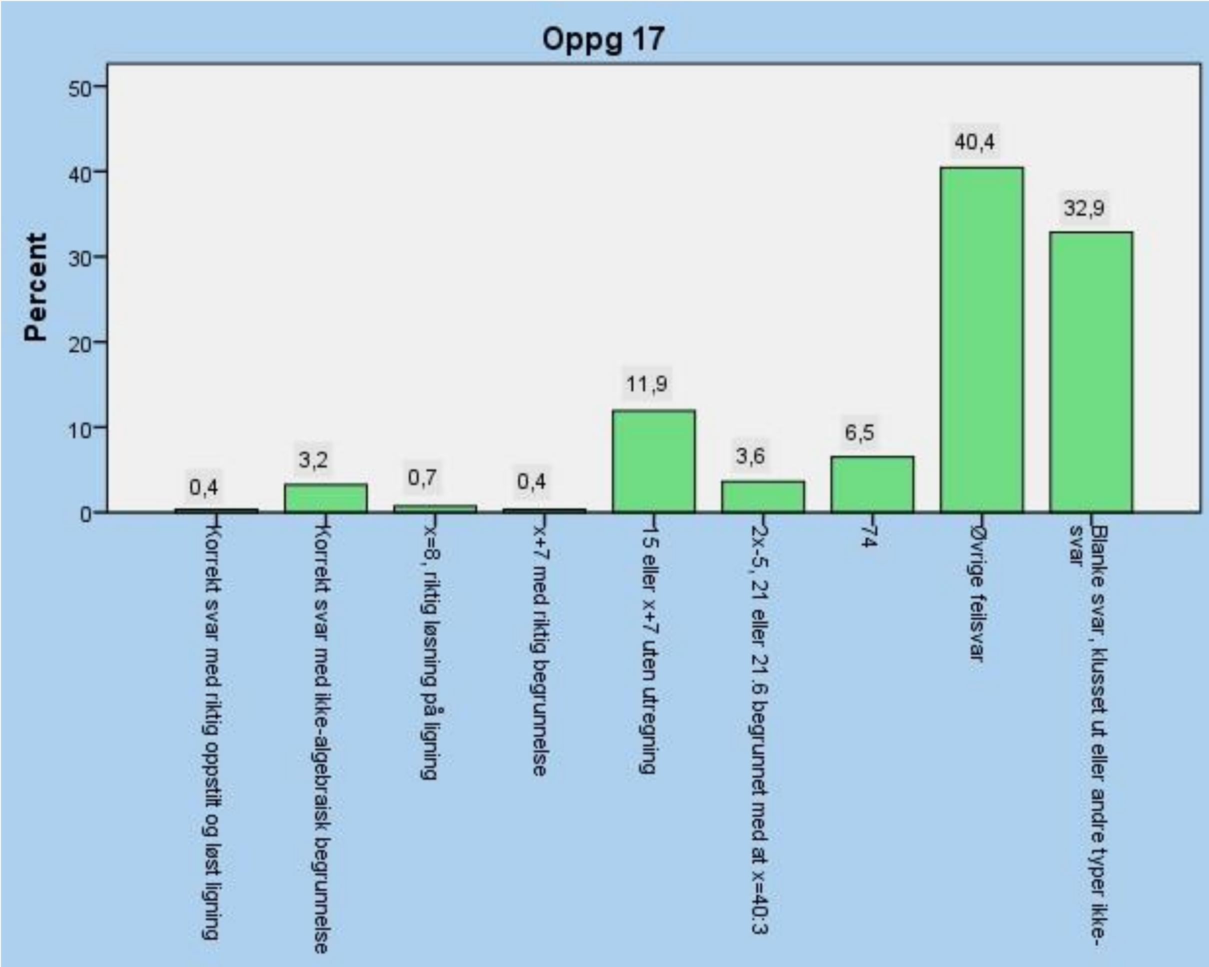
Figur 16: Frekvensfordeling for oppgave 15



Figur 17: Frekvensfordeling for oppgave 16

4.2.3 Trestokk delt i tre

Oppgave 17 var modellering og ligningsløsningsoppgaven der elevene skulle avgjøre hvilken del av en tredelt trestokk som var lengst. Frekvensfordelingen følger på neste side:



Figur 18: Frekvensfordeling for oppgave 17

4.2.4 Supplerende oppgaver

Disse oppgavene er ikke gjennomgått besvarelse for besvarelse som de foregående oppgavene, så her presenteres kun ferdig utarbeidet statistikk jeg fikk tilgang til gjennom SPSS-uttrekk fra TIMSS-data. Siden hver oppgave opptrer i to hefter, er antall besvarelser (N) omtrent dobbelt så stort som de 277 som er gjennomgått i dybden. Jeg oppgir her også det internasjonale gjennomsnittet for riktige svar som supplerende informasjon i mangel av åpenhet om oppgavelyden og svaralternativene da tre av disse oppgavene ikke er frigitte.

Supplerende oppgave 1: Ikke frigitt oppgave om riktig steg i løsning av lineær ligning. N = 542. Riktig alternativ: 21.7%. Gale alternativer: Henholdsvis 22.7%, 29.6% og 14.9%. Ikke svart: 11.2%. Internasjonalt gjennomsnitt (riktig svar): 43.2%.

Supplerende oppgave 2: Ikke frigitt constructed response-oppgave om brøkligning med ukjent i nevneren. N = 543. Riktig svar (kode 10): 10.5%, feilsvar som kan indikere en viss forståelse, mulig type 2-feil (kode 70): 11.6%, andre feilsvar inkludert klusset ut (kode 79): 62.5%, ikke svart: 15.4%. Internasjonalt gjennomsnitt (riktig svar): 27.1%

Supplerende oppgave 3: Ikke frigitt oppgave med lineær ligning der svaret er uekte brøk. N = 543. Riktig alternativ: 39.2%. Gale alternativer: Henholdsvis 13.4%, 14.5% og 27.0%. Ikke svart: 6.0%. Internasjonalt gjennomsnitt (riktig svar): 48.8%.

Supplerende oppgave 4: Frigitt oppgave om ulikheter. N = 537. Riktig svar ($x < 2$): 1.3%. Svaret oppgitt som i en ligning ($x = 2$, kode 70): 0.7%, øvrige feilsvar inkludert klusset ut (kode 79): 62%, ikke svart: 35.9%. Internasjonalt gjennomsnitt (riktig svar): 17.3%

5 Drøftninger

I dette kapittelet vil jeg først tolke og kommentere resultatene fra forrige kapittel med et spesielt fokus på å identifisere algebraiske ferdigheter eller mulige feiloppfatninger som omtalt i kapittel 2. Deretter vil jeg komme med noen generelle betraktninger om det store bildet som tegnes under drøftningene av resultatene.

5.1 Tolkninger av resultater

Jeg har i de følgende tolkningene forsøkt å gi en kortfattet gjentakelse av hva oppgavene går ut på, så leseren skal slippe å stadig bla tilbake.

5.1.1 Røde og blå brikker

Oppgave 3, 4 og 5 gikk ut på å fullføre og utvide en tabell over antall blå og røde brikker, samt totalt antall i kvadratiske mønstre med blå brikker som et indre kvadrat, og røde brikker som ramme rundt. Det mest påfallende poenget vi kan lese ut av resultatene for disse oppgavene, er den markante nedgangen i korrekte svar fra omtrentlig halvparten av elevene i oppgave 3 til svært lave 1.8% på oppgave 5. Samtidig øker graden av algebraiske elementer i oppgavene. Oppgave 3 med høy andel riktige svar er en ren prealgebra-oppgave som handler om telling, gjenkjenning av mønstre, og utfylling av en tabell. Oppgaven krever verken ferdigheter i generalisering, manipulering av algebraiske uttrykk, ligningsløsning eller modellering. Den samme mangelen på algebraiske elementer finner vi også i alle deloppgaver av oppgave 4, mens oppgave 5 er en ren generaliseringsoppgave, som også krever en viss ferdighet i manipulering av algebraiske uttrykk. Kort oppsummert er oppgave 3 og 4 rene prealgebraoppgaver, mens oppgave 5 er en ren algebraoppgave. Det kan være fristende å trekke den raske konklusjonen at disse resultatene vitner om en tydelig mangel på algebraferdigheter hos norske elever, mens de klarer seg nokså bra i prealgebraoppgaver som ikke krever formell algebra, helt i trå med tidligere funn (Grønmo & Bergem, 2009; Grønmo et al., 2012). Men før vi trekker noen slutninger er det et par interessante poeng som bør belyses. Den nedadgående kurven for korrekte svar går gjennom oppgave 4 der antall riktige svar går nedover for hver av deloppgavene. Dette betyr at det ikke bare er nærvær eller fravær av algebraiske elementer som har betydningen for resultatene i disse oppgavene. Spørsmålet er da hvorfor oppgave 4 synes mye vanskeligere enn oppgave 3? Oppgavene henger nøye sammen, og hvis man utvider tabellen i 3 med noen linjer kan man lese svarene rett ut av tabellen. Under gjennomgangen av besvarelsene fant jeg noen eksempler på at elever kladdet en slik tabell i margen, men dette gjaldt svært få, og det kan se ut som et stort flertall av elevene enten ikke har sett denne muligheten, eller ikke tatt seg tid til å utvide tabellen. Velger man en annen strategi kreves både en klar forståelse av geometrien eller mønsteret i figurene, men også ferdigheter i aritmetikk for å regne ut svarene. Noen elever har forsøkt å tegne figurene og telle, men dette er en tidkrevende prosess da kvadratet i oppgave 4c (finn antall blå når røde er 44) har 144 brikker totalt. På oppgave 3 er kvadratene imidlertid betydelig mindre, så tegn-og-tell-strategien kan fungere bra på denne. Andre årsaker til at flere har klart oppgave 3 kan være at denne oppgaven lar seg løse ved flere forskjellige strategier som krever forskjellige typer forståelse. For eksempel kan en elev ha liten forståelse for geometrien i oppgaven, men observere at kolonnen med røde brikker består av tall fra fire-gangen, eller at de øker med fire for hver gang, mens kolonnen for totalen består av kvadrattall. Ellers ser vi av feilsvarskategoriene at mange har forstått hvordan det totale antallet er summen av røde og blå brikker, selv om de ikke har funnet korrekt antall røde brikker. Dette ser vi også i 4a (finn blå og røde når summen er 64) der mange har oppgitt et antall blå og et antall røde som summerer til 64, uten at svarene er riktige hver for seg (feilkode 71 og 72). Av disse er det også noen som har antatt at 64 er det totale antallet på oppgave 4b (finn antall røde når blå er 49) og 4c (feilkode 71 i begge oppgavene), noe som vitner om liten forståelse for oppgaven.

Feilsvarene i oppgave 3 og 4 avslører at mange av de som svarer galt, enten har tippet et tilfeldig svar, eller valgt en strategi som produserer et svar, men som ellers ikke viser noen forståelse for oppgaven. Uten krav om begrunnelse eller utregning på disse oppgavene kan vi selvfølgelig ikke si dette helt sikkert, men det store antallet ulike feilsvar på alle deloppgaver, hvorav de fleste bare opptrer en gang og hvor tankegangen bak ikke lar seg identifisere på en enkel måte, sannsynliggjør i høy grad at mange av svarene er tilfeldig gjetting. Eksempler på strategier som gir feil svar er diagonalmønstre tilsvarende feilkode 73 i oppgave 3 eller de tilfellene der man har funnet antall blå/røde ved å bruke multipler eller brøkdeler av det oppgitte antallet røde/blå i oppgave 4b) og 4c), tilsvarende feilkode 72. Det er problematisk å kalle disse strategiene for feil*oppfatninger*, da graden av forståelse for problemet synes så liten at eleven sannsynligvis ikke har noen oppfatning om hvordan oppgaven skal løses i det hele tatt. I stedet for å svare blankt velger disse elevene en nærliggende måte å produsere et svar på, enten ved ren gjetting, eller ved en enkel manipulering med tallene i oppgaven, eller ved å sette tall inn i mønstre fordi slike mønstre kanskje har forekommet i tidligere prealgebraoppgaver. Vi ser med andre ord en klar overvekt av type 3-feil slik de ble forklart i kapittel 2.4.

Hvis vi sorterer svarkategoriene i prealgebraoppgavene 3 og 4 i en del der elevene viser helt eller delvis forståelse for oppgaven, og en del der elevene viser liten eller ingen forståelse, får vi følgende tabell:

Oppgave	God eller delvis forståelse	Liten eller ingen forståelse
3	Sum kode 20, 70, 71, 72: **74.7%**	Sum kode 73, 79, 99: **25.3%**
4a)	Sum kode 20, 70, 71, 72: **63.9%**	Sum kode 79, 99: **36.1%**
4b)	Sum kode 10, 70: **23.9%**	Sum kode 71, 72, 79, 99: **76.1%**
4c)	Sum kode 10, 70: **14.5%**	Sum kode 71, 72, 79, 99: **85.5%**

Tabell 1: Inndeling i god/delvis og liten/ingen forståelse for oppg 3, 4

Når det gjelder den rene algebraoppgaven, oppgave 5, som gikk ut på å generalisere mønsteret fra de foregående oppgavene, observerer vi følgende: Det er ingen av de 277 besvarelsene som plasseres i kategori 20, det vil si $4(n-1)$ eller $4n-4$ for røde brikker, og n^2, $n \times n$ eller ekvivalent svar uttrykt med ord for totalt antall. Det er derimot noen få som har korrekt svar som i kategori 21, hvor røde brikker uttrykkes som differansen mellom totalt antall og blå. Av feilsvarene ser vi også at noen flere har klart å uttrykke totalt antall brikker, mens svært få har fått til et godt forsøk på algebraisk uttrykk for røde brikker. Det er ikke overraskende at flere har greid totalt antall fordi dette er et betydelig enklere uttrykk. En kompliserende faktor for antall røde brikker er følgende: Hvis man innser at antall røde brikker langs en sidekant er n, og multipliserer dette med 4 for å få med alle sidekantene, må man også innse at alle hjørnebrikker vil bli talt to ganger slik at man må subtrahere 4 for å få riktig svar. Dette er med andre ord en oppgave med høy vanskelighetsgrad. Likevel er det påfallende at så forsvinnende få har vist algebraiske ferdigheter på denne oppgaven. I tillegg til liten eller ingen forståelse for generaliseringskonseptet tyder disse resultatene på at manipulering av algebraiske uttrykk virker fremmed og vanskelig for mange elever, og det samme gjelder symbolbruk generelt.

Også på denne oppgavene viser det store antallet ulike og unike feilsvar at mange, og i dette tilfellet de fleste av de som har svart, at det har blitt gjettet eller produsert et svar som er resultat av en feilaktig tankegang (type 3-feil). Ser vi på feilsvarskategoriene, ser vi at det er to typer feil som gjentar seg oftere enn andre, og som begge avslører liten algebraisk innsikt hos elevene. Den ene er en antagelse om at antall røde brikker og totalt antall brikker skal følge et mønster med uttrykk av samme type som antall blå, et tall subtrahert fra n inne i en parentes som opphøyes i en potens (kode 72). Eksempler på dette er $(n-2)^3$ og $(n-2)^4$ eller $(n-3)^2$ og $(n-4)^2$. I det første eksempelet ser vi en manglende forståelse for både betydningen av en eksponent, og for oppgaven generelt. Det at antall røde brikker får en høyere eksponent enn blå brikker viser at eleven ikke forstår at antall blå brikker vokser fortere enn antall røde, og sannsynligvis forstår de heller ikke at tall opphøyd i eksponenter større enn to fort blir svært store. I det andre eksempelet øker ikke eksponenten, men uttrykkene for røde og totalen gir ingen mening og viser at eleven ikke forstår oppgaven. Den andre typen feilsvar jeg vil trekke frem er den som utgjør de fleste svarene i koden for øvrige feilsvar som ikke viser noen grad av algebraisk forståelse, 79. Disse elevene har oppgitt et tall på det ene eller begge rutene, noe som vitner om total mangel på forståelse for generaliseringskonseptet. Poenget med denne linjen i tabellen er nettopp det at både blå, røde og totalt antall brikker vil endre seg når *n* endrer seg, og de generelle uttrykkene skal vise nøyaktig hvordan denne endringen foregår.

Som i prealgebraoppgavene blir det vanskelig å kalle disse feiltypene for misoppfatninger, da de fleste feilsvarene ikke viser noen spor etter kunnskaper om generaliseringskonseptet eller algebraiske konsepter generelt. Det synes som om de fleste besvarelsene kommer fra elever som ikke har noen oppfatning om algebra-aspektet i oppgaven, selv om flere av dem viste forståelse for de foregående oppgavene. Et relativt høyt antall blanke besvarelser støtter denne teorien. En oppdeling i svar som viser helt eller delvis algebraisk forståelse, og svar som viser liten eller ingen algebraisk forståelse (se tabell 2 i delkapittel 5.1.3) gir et nokså sterkt pekepinn mot at elevenes læringsmuligheter har vært svært begrenset, og at de aller fleste sannsynligvis ikke har sett lignende oppgaver før.

5.1.2 Flervalgsoppgavene

Jeg har i denne studien inkludert de tre flervalgsoppgavene (multippel choice) som sorterer under algebra i hefte 1. I utgangspunktet er denne typen oppgaver mindre interessante enn «open-ended»-oppgaver sett i lys av formålet med denne studien fordi man ikke har noen mulighet til å lese ut informasjon om hvordan den enkelte elev har tenkt for å komme frem til svaret. Siden svaret oppgis i form av et kryss, kan vi heller ikke vite om eleven i det hele tatt *har* jobbet seg frem til et svar. De kan ha regnet ut svaret, de kan ha resonnert seg frem til et svar ved å bruke strategier som eliminering av distraktorer, eller de kan ha gjettet svaret uten noen som helst oppfatning av om svaret er riktig eller ikke. Til tross for disse begrensningene finnes likevel relevant informasjon når man ser på hele bildet i stedet for på enkeltbesvarelser. Hvis man antok at alle elever gjettet helt tilfeldig uten å gjøre noen vurdering av alternativene, vil vi få en statistisk forventningsverdi på 25% oppslutning om hvert av de fire svaralternativene. Hvis frekvensanalyser viser at oppslutningen om et alternativ avviker signifikant fra 25%, kan vi anta at en viss andel av elevene har hatt en oppfatning av om alternativet er riktig eller galt. Hvis en av distraktorene får en oppslutning signifikant over 25%, kan det tyde på at distraktoren representerer en feiloppfatning eller en vanlig måte å tenke feil på. Det er derfor viktig at distraktorene velges med omhu under design av flervalgsoppgaver. Dersom oppgaven er av en slik karakter at det finnes kjente feiloppfatninger knyttet til akkurat en slik oppgave, bør en distraktor være designet for å fange opp denne feiloppfatningen (Dahl, 2011). I tillegg er det viktig at ingen distraktorer er så fjerne fra et rimelig fornuftig svar at de lett lar seg eliminere. Dette for å unngå at elever resonnerer seg frem til riktig svar uten å ha matematiske ferdigheter som tilsier at de er i stand til å løse oppgaven.

Oppgave 9:

(Hvilket tall må $t + 5$ ligge mellom når t er et tall mellom 6 og 9?) Frekvensanalysen viser at det er to svaralternativer som har klart mye større oppslutning enn de to andre. Det er alternativ B med 37.9%, og det riktige alternativ C med 40.4%. Bare 1.4% har svart D, mens 14.1% svarte A, øvrige besvarelser var blanke. Her avviker alle prosenter signifikant fra 25, så vi kan anta at mange elever har hatt en oppfatning om hva som er riktig svar. Videre ser vi at alternativ B og C har tall som ligger svært nær hverandre, henholdsvis 10 – 13 og 11 – 14. De øvrige alternativene avviker mye mer fra det riktige svaret, og D med 30 – 45 får så lav oppslutning at det kan se ut som en svak distraktor da hele 98.6% ikke har valgt dette alternativet. Legger vi sammen B og C, ser vi at 78.3% har svart riktig eller nesten «riktig». Dette er en oppgave med nokså lav vanskelighetsgrad, og det som kreves av algebraisk forståelse er en erkjennelse av at en bokstav kan ha en tallverdi, en av de mest grunnleggende erkjennelsene innenfor algebra, og dette ser det ut til at mange har forstått. Samtidig kan man argumentere med at dersom norske elever på 8. trinn har gode algebrakunnskaper, burde langt mer enn 40% ha svart riktig på en oppgave med lav vanskelighetsgrad.

Oppgave 15:

(Skal finne arealet av et rektangulært skravert område, tilsvarende en plen med en sti som må trekkes fra) Denne flervalgsoppgaven hadde også en nokså ujevn fordeling av oppslutning om de fire alternativene, men i motsetning til forrige oppgave der det riktige alternativet hadde høyest oppslutning, ser vi her at det riktige alternativet A bare får 9.0%, mens C får over halvparten med 57.8%. B og D får henholdsvis 20.6% og 6.1%, mens 6.5% ikke har svart. For å finne riktig svar her må elevene først forstå at de må regne ut arealet av to rektangler, hagen og stien, og så subtrahere stien fra hagen. Dette er en typisk geometrioppgave som kan opptre på 5.-6. trinn dersom sidekantene er kjente størrelser. Men siden de her er uttrykt som funksjoner av x, kreves algebraiske ferdigheter i form av manipulering og aritmetikk med bokstavuttrykk. For å finne arealet av hagen må x multipliseres med $(x + 4)$, og deretter må arealet av stien$1 \cdot x = x$ trekkes fra slik at svaret blir $x^2 + 3x$. Her omfatter svaralternativene fire uttrykk som alle har et x^2-ledd og deretter alle fire kombinasjoner av $3x$ eller $4x$ og -1 eller ingen konstantledd. Vi ser at de to alternativene med høyest oppslutning (C og B) er de som har et $4x$-ledd, mens de to med $3x$-ledd har svært lav oppslutning. Av C og B har C mer enn dobbelt så høy oppslutning, og C er det alternativet som trekker fra 1. En nærliggende tolkning av disse resultatene er følgende: I stedet for å forsøke å regne ut svaret på egenhånd, velger de fleste elevene å se etter det alternativet som «ser mest riktig ut». Alle uttrykkene er annengradsuttrykk, så de forstår at svaret har en slik karakter uten at de nødvendigvis er i stand til å gange ut parentesen. Uttrykkene med $4x$ virker mer riktig enn de med $3x$ fordi 4 opptrer i en av sidene på hagen. Videre virker C mer riktig enn B fordi C trekker fra 1, og stien er jo 1 meter bred. Slik kommer over halvparten til at C ser mest riktig ut. Dette viser at mange elever kan gjøre et resonnement som virker logisk og fornuftig, men at de mangler kunnskaper om aritmetikk med bokstavuttrykk som ville gitt at det er *x* som skal subtraheres og ikke 1. En så lav oppslutning om riktig svar tyder på at kunnskapen om dette algebraiske konseptet er svært mangelfull, eller at svært få har tatt seg tid til å regne ut svaret, og heller krysset av for det svaret som først virket riktig.

Oppgave 16:

(Skal finne verdien av y når $y = \frac{a+b}{c}$ når verdiene av a, b og er gitt). Denne siste flervalgsoppgaven fremstår som betydelig lettere enn den foregående, da denne har en andel riktige på hele 70%. Som oppgave 9 krever heller ikke denne andre ferdigheter i algebra enn å forstå at bokstaver kan tilordnes en numerisk verdi, og at disse verdiene settes inn i uttrykket. Resten er elementær aritmetikk hvor den eneste fellen man kan gå i er regnerekkefølgen for aritmetiske operasjoner. Hvis man i stedet for å regne summen i telleren først, dividerer 8 på 2 og så legger til 6, får man 10 som er en av distraktorene, men som har lavere oppslutning (7.9%) enn alternativ D: 14 (12.3%) som tilsvarer summen i telleren.

5.1.3 Trestokk deles i tre

Oppgave 17 er kanskje den mest interessante av samtlige oppgaver som blir gjennomgått i denne studien, delvis fordi den er en constructed-responce-oppgave hvor eleven i tillegg blir bedt om å redegjøre for fremgangsmåte slik at forutsetningene blir gode for å kunne identifisere tankegangen bak, og delvis fordi det er en oppgave som involverer to viktige algebraiske konsepter; modellering og ligningsløsning. For å løse denne oppgaven må man finne ut hva *x* er, og dette gjøres selvsagt lettest ved å sette opp en ligning og løse den. Dette er den algebraiske måten å løse oppgaven på, man benytter seg først av modellering for å oversette et problem fra dagliglivet til et matematisk problem, i dette tilfellet en ligning, for deretter å bruke det man måtte ha av ferdigheter innen ligningsløsning for å finne den ukjente størrelsen. Når dette er gjort går man tilbake til det opprinnelige problemet, setter inn den nå kjente størrelsen og evaluerer problemet, i denne oppgaven betyr det å sammenligne de nå kjente lengdene av trestokkdelene for å finne ut hvem som er lengst. Men det finnes alternative måter å løse problemet på, og av resultatene ser vi at alternative løsningsmetoder, enten de fungerer eller ikke, er brukt i langt større grad enn den algebraiske måten å gjøre det på. Av 277 besvarelser er det kun 1 elev (0.4%) som har løst oppgaven korrekt på den algebraiske måten! Av de som har løst oppgaven på alternative måter, enten ved å teste ut forskjellige verdier av *x*, eller ved å resonnere seg frem til hva *x* må være på andre måter, er det 9 besvarelser som har fått kode 21, dette utgjør 3.2% av utvalget. Av den kumulative prosenten ser vi da at 3.6% har fått full score på denne oppgaven. Videre har vi feilsvarskategori 70 og 71 som tilsvarer koder for delvis riktig i TIMSS scoringsguide, men begge disse har svært lav oppslutning, henholdsvis 0.7 og 0.4%. Disse resultatene, samt det faktum at nesten en tredjedel (32.9%) ikke har svart på oppgaven vitner om at dette er en oppgave med høy vanskelighetsgrad som norske elever har hatt store problemer med. Neste spørsmål blir da om det finnes spor av algebrakunnskaper i feilsvarene som foreligger. Den vanligste feilen som er gjort er å dividere 40 med 3, og oppgi 13,33 (med varierende antall 3-tall som desimaler) enten som svar på oppgaven eller som verdien av x. Det første tilfellet som har fått kode 74, svart av 6.5%, vitner om total mangel på forståelse av både oppgaven generelt og algebraen i oppgaven. Det kan kanskje være nærliggende for svake elever å tenke divisjon når det stå i oppgaven at en trestokk deles i tre, men det vil være meningsløst å spørre om hvor lang den lengste delen er hvis alle er like lange. Disse elevene ser helt bort ifra at lengden på delene er oppgitt som tre forskjellige algebraiske uttrykk, og ignorerer derfor algebraen i oppgaven fullstendig. Av de som har brukt 13.3 som x, er det noen som har evaluert uttrykkene for lengdene riktig, de har satt inn 13.3 for x og funnet ut at delen med lengde $2x - 5 = 21.6$ blir lengst (feilkode 73 med 3.6%). Det de ikke har gjort er å legge sammen lengdene til alle delene for å se om de summerer til 40 cm, noe som raskt ville avslørt at svaret er feil. Disse elevene viser derfor ikke mer algebraisk forståelse enn at de er i stand til å sette inn en numerisk verdi for en bokstav, jf oppg 9 og 16. Blant øvrige feilsvar var gale svar uten begrunnelse, tilsynelatende tilfeldig gjetting eller forsøk på utregninger som vitnet om liten eller ingen forståelse for oppgaven eller algebraen i oppgaven. Disse havnet i kategori 79 som i denne oppgaven ble den største med 40.4%.

Ut ifra disse observasjonene, synes det som om det er få spor etter algebrakunnskaper blant de mange feilsvarene på oppgave 17. Jeg vil likevel trekke frem et interessant unntak. I tillegg til den ene besvarelsen som ble kodet med 20, har jeg funnet ytterligere en elev som har klart å sette opp en korrekt ligning. Denne eleven har med andre ord forstått modelleringsaspektet av oppgaven. Dessverre var ligningen ikke løst riktig så besvarelsen ble kodet som et feilsvar. Men et spennende poeng her er at jeg kunne se av identifikasjonsnummerene at denne eleven kommer fra samme klasse eller samme skole som den ene eleven med korrekt algebraisk svar. Dette kan naturligvis være tilfeldig, men det er påfallende at de to eneste som har klart å sette opp en korrekt ligning kommer fra en av 134 skoler, og man kan ikke se bort fra muligheten for at disse to elevene kommer fra en klasse/skole som har hatt et spesielt fokus på matematisk modellering, eller at de har hatt en lærer som enten ser viktigheten av å lære dette så tidlig som mulig, eller som har praktisert strategien «teaching to the test». At ingen andre skoler/klasser er representert med elever som har løst oppgaven ved å sette opp en ligning er en sterk indikasjon på at dette er en type oppgave norske elever på 8. trinn er lite kjent med. Dette støttes av Karimzadeh (2014) som i sin masteroppgave påviser at modelleringsoppgaver av denne typen nesten er helt fraværende i norske lærebøker for 8. trinn.

Videre bør det presiseres at det er de formelle algebraferdighetene som ser ut til å være fraværende. Både av de som ble kodet med 21 for riktig svar med alternative begrunnelser, og blant de som har endt opp med en feilkode fordi noe har gått galt på veien finnes flere eksempler på elever med god resonneringsevne, hvor vi kan lese ut fra begrunnelsene at resonnementene deres ligner på den prosessen man går gjennom når man løser en ligning. Et illustrerende eksempel er følgende fra en besvarelse som fikk kode 70 for å ha funnet riktig verdi av x: «Jeg plusset sammen 6+7, så trakk jeg fra 5. Da kom jeg fram til 8, så fant jeg ut x ved og ta 40 – 8. Da sto jeg igjen med 32. Da delte jeg 32 på 4 som er 8.» La oss sammenligne dette med å løse ligningen $2x - 5 + x + 7 + x + 6 = 40$. Hvis vi trekker sammen konstantleddene på venstresiden får vi ganske riktig 6 + 7 – 5 = 8, som så trekkes fra 40 etter å ha flyttet over til høyresiden, og vi sitter igjen med 32. Selv om eleven ikke viser at x’ene trekkes sammen til $4x$, forklarer vedkommende at 32 må deles på 4 for å finne x. I praksis har denne eleven løst en ligning uten å stille den opp, og sannsynligvis uten å vite det selv. Dette viser at det finnes gode problemløsere blant norske elever på 8. trinn som kan klare å løse slike oppgaver til tross for at det ser ut som om de ikke er i besittelse av det viktigste verktøyet for å løse en slik oppgave; det å kunne modellere et matematisk problem ved å stille opp en ligning, og løse ligningen. Det bør imidlertid presiseres at det var en liten andel av elevene som viste denne resonneringsevnen. Noen har startet lignende resonnementer uten å komme i mål, andre har funnet riktig verdi av x, men med mangelfull forklaring slik at det ikke kan fastslås med sikkerhet om de har resonnert riktig, prøvd seg frem eller gjettet. Dette gir et noe usikkert estimat på 2-3% som viser en god eller delvis evne til å resonnere på en algebraisk måte. Et flertall av de som fikk kode 21 for korrekt svar, har funnet x ved å prøve ut forskjellige verdier, og kontrollere at lengdene summeres til 40. Disse viser forståelse for oppgaven, men begrensede ferdigheter i algebra da de ikke har benyttet seg av den opplagte algebraiske måten å løse problemet på. Hvis vi regner ut den kumulative prosenten fra venstre mot høyre i frekvensfordelingen (figur 18), viser det seg at de som fikk kode 20 eller 21, samt feilkode 70 og 71 som tilsvarer delvis riktig i TIMSS scoringsguide, til sammen utgjør 4.7% (se tabell 2 nedenfor). Hvis vi trekker fra de som prøvde seg frem kommer vi under 2%, og vi kan ikke legge til noen betydelig grad av algebraisk forståelse fra feilkategori 72-79. Det vil si at mindre enn 2% viste noen betydelig grad av algebraisk forståelse på denne oppgaven, og av disse var det bare denne ene eleven som løste oppgaven korrekt med formelle algebraiske metoder.

Tabell 2 viser en oppdeling for de rene algebraoppgavene 5 og 17, tilsvarende den i tabell 1, hvor jeg har summert prosentandelene for kodene som indikerer hel eller delvis forståelse på den ene siden, og kodene for liten eller ingen forståelse på den andre siden:

Oppgave	God eller delvis forståelse	Liten eller ingen forståelse
5	Sum kode 20, 21, 70: **8.3%**	Sum kode 71, 72, 79, 99: **91.7%**
17	Sum kode 20, 21, 70, 71: **4.7%**	Sum kode 72, 73, 74, 79, 99: **95.3%**

Tabell 2: Inndeling av koder etter algebraisk forståelse for oppg 5 og 17

En uheldig konsekvens av den svært lave andelen elever som greide å sette opp en ligning, er at vi i praksis bare fikk testet en av de to sentrale algebraiske konseptene i denne oppgaven. Dette utgjør en trussel mot validiteten av konklusjonene vi kan trekke ut av betraktningene som er diskutert her, da vi ikke kan si noe sikkert om hvordan ferdighetene i ligningsløsning er i det aktuelle utvalget. For å si noe om dette burde vi hatt en oppgave med en ferdig oppstilt ligning, forsøkt løst av de samme elevene. Dessverre finnes ikke en slik oppgave i hefte 1, og heller ikke i utvalget av offentliggjorte oppgaver, slik at for å finne supplerende kontrolloppgaver, måtte jeg ty til oppgaver i andre hefter som ikke kan beskrives i detalj, da disse er unntatt offentligheten. De vil likevel gi oss en viss innsikt i norske elevers kompetanse i ligningsløsning, da antall besvarelser for disse oppgavene er mer enn 540, et tall som er sterkere enn de 277 besvarelsene jeg gjennomgår fra hefte 1, med tanke på generalisering til hele populasjonen. De supplerende oppgavene blir diskutert i neste avsnitt.

Før vi sier oss ferdig med oppgave 17, vil jeg si litt om feiloppfatninger. Som diskutert flere ganger i drøftningen av oppgavene blir det også her vanskelig å si at de kodede feilsvarskategoriene representerer algebraiske misoppfatninger på grunn av det tilsynelatende omfattende fraværet av algebraiske oppfatninger. Likevel vil jeg nevne en kjent algebraisk misoppfatning som er omtalt i kapittel 2, og som kommer til syne fordi elevene blir bedt om å redegjøre for fremgangsmåte, noe som gir en viss innsikt i hvordan algebraiske uttrykk blir behandlet, og hvordan viktige symboler blir tolket. La meg illustrere med et eksempel fra en besvarelse der eleven antar at man finner x ved å dividere 40 med 3. Følgende utregning ble lagt til grunn for det feilaktige svaret 20.33 cm:

$$40cm : 3 = 13.33 + 7 = 20.33cm$$

Vi ser at likheten representert ved det første «er lik»-tegnet ikke holder, men forstår at eleven først har skrevet svaret på 40:3, for så å fortsette regnestykke ved å legge til 7. Sannsynligvis er dette ment som en forenkling, en måte å «trekke sammen» to regneoperasjoner til en, men det avslører også at eleven trolig ser på «er lik»-tegnet som en operator som transformerer 40:3 til 13.33 i stedet for et tegn som symboliserer likhet mellom uttrykket til venstre og uttrykket til høyre.

5.1.4 Supplerende oppgaver

Supplerende oppgave 1:

(Ikke frigitt oppgave om riktig steg i løsning av lineær ligning.) Vi ser at den norske andelen riktige svar bare utgjør halvparten av det internasjonale gjennomsnittet, og 21.7% ligger også under forventningsverdien ved tilfeldig gjetting (25%). To gale alternativ har høyere oppslutning, og det siste nesten 15%. Relativt små avvik fra forventningsverdien tyder på at mange besvarelser har vært gjettinger, og andelen elever som forsto oppgaven og løste den riktig er sannsynligvis betydelig lavere enn 21.7%. Det er for øvrig interessant at 11.2% ikke har svart, da elevene ikke har noe å tape på å sette et kryss, det koster svært liten innsats og har ingen konsekvenser for den enkelte elev. Resultatene vitner om at norske elever på 8. trinn har lav kompetanse på en elementær teknikk innen ligningsløsning. «Flytte-bytte»-regelen blir undervist i introduksjonsfasen av pensum om ligninger (Karimzadeh, 2014), og det internasjonale gjennomsnittet forteller at vanskelighetsgraden på denne oppgaven ikke bør være avskrekkende høy.

Supplerende oppgave 2:

(Ikke frigitt constructed response-oppgave om brøkligning med ukjent i nevneren.) Den norske andelen riktige svar var på denne oppgaven mindre enn halvparten av det internasjonale gjennomsnittet på 27.1%, et snitt som vitner om en relativt vanskelig oppgave. Likevel er det bare 15% som ikke har svart, så andelen feilsvar er høy. En årsak til at mange har prøvd seg, kan være at oppgaven også kan tolkes som en oppgave om forholdstall som bør være kjent stoff, og det er ikke sikkert alle har tenkt ligning når de har sett denne.

Supplerende oppgave 3:

(Ikke frigitt oppgave med lineær ligning der svaret er uekte brøk.) Denne oppgaven hadde en norsk andel riktige på 39.2% som bare var 9.6 prosentpoeng under det internasjonale gjennomsnittet. Det korrekte alternativet hadde klart større oppslutning enn distraktorene. Da svaret var en uekte brøk og det riktige alternativet (som det eneste) var blandet tall, var det slett ikke opplagt for meg at dette var en oppgave som norske elever ville klare relativt bra. Jeg tror dette kan indikere at de som forsto hvordan ligningen skulle løses, også hadde god kontroll på brøk. Men siden brøk blir introdusert langt tidligere enn ligninger er det heller ikke overraskende hvis brøk er et område elever på 8. trinn behersker betydelig bedre enn ligninger.

Supplerende oppgave 4:

(Ulikhetsoppgaven.) Resultatene på ulikhetsoppgaven gir en sterk indikasjon på at ulikheter er noe som norske elever har liten kjennskap til. Kun 1.3% svarte riktig, resten var enten feil eller ikke besvart. Det internasjonale gjennomsnittet på 17.3% tyder på at ulikheter er nytt og vanskelig for elever i mange land, men at dette tallet er mer en 13 ganger så høyt som den norske andelen riktige svar, forteller at norske elever er spesielt svake i ulikheter.

5.2 Generelle betraktninger og funn

I dette avsnittet vil jeg forsøke å si noe om det helhetlige bildet vi kan tegne på bakgrunn av betraktningene som er knyttet til den enkelte oppgave. De poengene som her presenteres karakteriserer jeg som studiens funn. Jeg vil også si noe om kvaliteten på forskningen jf kapittel 3.5 om validitet og reliabilitet.

Det mest synlige poenget, og det første som kan karakteriseres som et funn, er utvilsomt de svake resultatene på de formelle algebraoppgavene 5 og 17. Dette er selvsagt ingen ny oppdagelse, den er dokumentert og redegjort for i flere runder av TIMSS i rapporter og analyser (Grønmo et al., 2012). Andelen av korrekte besvarelser er riktignok bemerkelsesverdig lav for de rene algebraoppgavene, og spesielt oppsiktsvekkende er det at bare én av 277 elever løste oppg 17 på den åpenbare algebraiske måten; ved å sette opp en ligning og løse den. Det må tas med i betraktningen at både oppgave 5 og 17 har en relativt høy vanskelighetsgrad for elever på 8. trinn, noe som bekreftes av nokså lave internasjonale snitt, men hvis dette er oppgavetyper som elevene har forsøkt seg på før, bør vi kunne forvente at de sterkeste 4-5% av elevene mestrer både modelleringen og ligningen, mens det faktiske tallet bare er 0.4%. Dette er en sterk indikasjon på at læringsmulighetene i algebra ikke er god nok. Tar vi med det vi kunne finne av forståelse fra alternative løsningsmetoder og feilsvar kommer vi opp på nettopp 4-5% som vi kan anta tilsvarer den sterkeste eleven i klassen.

Det andre funnet jeg vil trekke frem er kontrasten mellom ferdighetene i de rene algebraoppgavene, og de rene prealgebraoppgavene. Det var omtrentlig 100 ganger flere elever som mestret oppgave 3 (fylle ut tabell om blå og røde brikker) enn det var elever som løste oppgave 17 (trestokk delt i tre) på «algebraisk vis».

Det tredje poenget som kan karakteriseres som et funn, er at norske elever på 8. trinn viser store svakheter i samtlige av de fem underområdene av algebra som ble presentert i kapittel 2. Oppgavene om blå og røde brikker viste manglende forståelse for generaliseringskonseptet, oppgave 17 (trestokk) viste svært liten forståelse for modelleringskonseptet, samme oppgave viste i samspill med de supplerende oppgavene at ferdighetene er mangelfulle i ligningsløsning. Oppgave 5 (generalisering av brikkemønster) og 15 (areal av skravert område), samt noen eksempler fra utregninger som begrunnelse på oppgave 17 viser at mange har problemer med aritmetikken når det er snakk om algebraiske uttrykk som skal regnes med eller manipuleres. Når det gjelder symbolbruk var det noen som viste forståelse for at bokstaver kan ha numeriske verdier gjennom oppgave 9 (intervall for $t + 5$) og 16 (innsetningsoppgaven), men ut ifra det jeg ser i utregninger later det til å herske en del forvirring rundt ulike måter å benytte bokstaver på, hvordan man trekker sammen tall og bokstaver (jf generalisert aritmetikk) og betydningen av regneoperatorsymboler som «er lik»-tegnet. Alt dette tyder på at algebra generelt er nytt og vanskelig for norske elever på 8. trinn, hvilket i sin tur styrker inntrykket av at algebraundervisningen kommer i gang for sent, og at elevenes forståelse for algebra er svært liten.

Et fjerde viktig funn handler om hvilke typer feil elevene gjør. Vi definerte tre feiltyper i teorikapittelet; Type 1 er en prosedyrefeil, noe som går galt i utregninga uten at det nødvendigvis er mangel på forståelse. Denne feiltypen er allment kjent som «slurvefeil». Type 2 er det vi kaller feiloppfatninger, en systematisk feil som oppstår fordi eleven har misforstått et konsept, og dermed gjør samme feilen hver gang han møter på en tilsvarende oppgave. Type 3 er en feil som oppstår når eleven ikke har noen formening om hvordan oppgaven løses, og dermed gjetter, eller «dikter opp» en løsningsmetode som kanskje kan virke fornuftig for eleven der og da. Etter å ha gått gjennom 277 besvarelser med en forventning om å identifisere noen feiloppfatninger, sitter jeg igjen med en annen fasit; av de feilsvarene jeg har studert har et overveldende flertall vært feil som jeg ikke har vært i stand til å identifisere tankegangen bak, eller feil hvor jeg *har* identifisert tankegangen bak, men hvor denne tankegangen bærer preg av å være en nærliggende, lettvint eller «hjemmesnekret» løsningsmetode som jeg vanskelig ser kan være resultat av at eleven har lært stoffet for så å misforstå noe. Et stort antall ulike feilsvar støtter denne antagelsen, svarene virker tilfeldige, og jeg var heller ikke i stand til å identifisere mange Type 1- feil. Jeg tolker den høye forekomsten av Type 3- feil som en indikasjon på at elevene i liten grad er kjent med stoffet, og at de derfor enten gjetter eller unnlater å svare. På de rene algebraoppgavene er de desidert mest brukte kodene 79 og 99, henholdsvis øvrige feilsvar og blanke svar/ svar uten relevant informasjon. Dette funnet oppfatter jeg som en sterk støtte til forskning, for eksempel Karimzadeh (2014) som antyder at læringsmulighetene i algebra ikke er gode nok.

Med hvilken grad av sikkerhet kan vi så trekke noen konklusjon fra disse betraktningene? Som nevnt i kapittel 3.5 om validitet og reliabilitet finnes det utfordringer knyttet til hvor nøyaktig elevenes algebrakompetanse blir målt. Selv om kodingen og statistiske beregninger er utført så nøyaktig som det lar seg gjøre, og selv om antall besvarelser er stort nok til at resultatene til en viss grad lar seg generalisere til hele populasjonen (fordi vi har et sannsynlighetsutvalg av en ikke ubetydelig størrelse (Kleven et al., 2011)), er det skjønnsmessige vurderinger som avgjør hvor mye algebraisk forståelse som legges i hver feilsvarskategori. Det foreligger dessverre ikke noe tall som forteller eksakt hvor mye algebra elevene kan eller hvor mye de burde kunne dersom læringsmulighetene i algebra skulle være gode nok. Det blir derfor vanskelig å utføre hypotesetesting med tilhørende signifikansnivå, t-tester eller trekke konklusjoner på et rent statistisk grunnlag som i en rendyrket kvantitativ tilnærming. Konklusjonen må derfor bli av en mer kvalitativ karakter. Som i en kvalitativ studie der man ikke er ute etter generaliserbarhet eller kausale slutninger, vil jeg konkludere med hva funn i denne oppgaven tyder på, og hvilke slutninger vi *sannsynligvis* kan trekke av disse. Tallene fra den kvantitative delen av studien vil sannsynliggjøre og støtte opp under slutningene og bidra til at jeg med en tilfredsstillende grad av sikkerhet kan konkludere som jeg gjør.

Avslutningsvis i dette avsnittet vil jeg klargjøre et poeng som potensielt kunne forvirret en observant leser. Et av kriteriene som ble presentert i kapittel 3.4 for valg av oppgaver, var at alle oppgavene burde være løst av de samme elevene slik at man kan se etter korrelasjoner, for eksempel av typen «elever som svarer X på en oppgave, tenderer til å svare Y på en annen oppgave». Likevel har jeg ikke presentert noen slike korrelasjoner. Begrunnelsen for dette er at jeg ikke har funnet noe som tyder på at slike funn kan hjelpe meg ytterligere med å besvare forskningsspørsmål og problemstilling, og jeg har derfor valgt å ikke bruke ressurser på dette.

6 Konklusjon

Dette siste kapittelet inneholder en oppsummering av oppgaven, en konklusjonsdel som har til hensikt å svare på forskningsspørsmål og problemstilling, og avslutningsvis et avsnitt hvor jeg kort diskuterer hvilke konsekvenser funn i denne oppgaven bør få i skolen.

6.1 Oppsummering

I denne oppgaven har jeg forsøkt å finne informasjon om algebraisk kompetanse eller feiloppfatninger hos norske elever på 8. trinn utover den informasjon som allerede foreligger i offentliggjorte analyser fra undersøkelsen. Dette har jeg gjort gjennom å studere 277 besvarelser av algebraoppgaver fra TIMSS 2011. Jeg har hatt et spesielt fokus på feilsvar, og definert feilsvarskategorier utover de som brukes i scoring av besvarelsene i TIMSS for å tegne et mer nyansert bilde av elevenes algebraiske kompetanse. Et sentralt spørsmål har da vært om det var mulig å finne spor av algebrakunnskaper i feilsvarene. Der TIMSS scorer for å måle kompetanse i poeng, har jeg hatt et mer diagnostisk fokus, og lett etter informasjon om elevenes tankegang bak feilsvar i utregninger og begrunnelser.

Forskningsdesignet jeg har brukt er hovedsakelig kvantitativt med integrerte kvalitative elementer. Da det er vanskelig å separere de kvantitative og kvalitative elementene i to forskjellige metoder, vil jeg ikke kalle designet for et mixed methods-design i tradisjonell forstand, men heller en sammensmelting av en kvantitativ og en kvalitativ tilnærming.

Som teoretisk rammeverk har jeg med støtte i litteraturen delt algebraen inn i fem konsepter som jeg har brukt som bakteppe når jeg har lett etter algebraisk kompetanse. De fem konseptene er generalisering, modellering/problemløsning, ligninger/ ulikheter, symbolbruk og manipulering av algebraiske uttrykk. Jeg har også tatt for meg prealgebra, definert som de matematiske aktivitetene som naturlig går over i algebra når elevene når ungdomstrinnet. Delkapittelet om feiloppfatninger delte feilsvar inn i tre kategorier; Prosedyrefeil/slurvefeil (type 1), feiloppfatninger (type 2) og gjettinger/andre typer feil (type 3). Siste delkapittel i teoridelen omhandlet elevenes læringsmuligheter i algebra, og hvordan disse omtales i TIMSS.

I kapittelet om resultater presenterte jeg de kodene som er brukt til feilsvarskategoriene jeg har definert. Selv om jeg langt på vei adopterer kodingssystemet fra TIMSS' scoringsguide har jeg her forklart hvorfor jeg har redefinert noen av disse kodene for å tilpasse kodingssystemet etter formålet med oppgaven. Resultatene fra kodingen av oppgavene er presentert som deskriptiv statistikk i form av diagrammer med frekvensfordelinger. I tillegg oppgir jeg for noen oppgaver alle ulike besvarelser for å illustrere det problematiske aspektet ved mange ulike feilsvar.

I drøftningskapittelet fremla jeg viktige poeng for hver oppgave, mens jeg under «generelle betraktninger» presenterte en liste med funn som er gjort under arbeidet med å gjennomgå besvarelser. Listen kan sammenfattes slik:

- Svært svake resultater på de rene algebraoppgavene 5 (generalisering av brikkemønster) og 17 (trestokk delt i tre). Alvorlig mangel på ferdigheter i formell algebra.
- Stor forskjell i prestasjoner mellom prealgebraoppgaver og rene algebraoppgaver.
- Manglende kunnskaper i alle de fem underområdene som omtales i teorikapittelet. Spesielt vanskelig synes generaliseringskonseptet, modellering/problemløsning og ligningsløsning.
- Av de tre definerte feiltypene er type 3 helt klart overrepresentert noe som indikerer at mange elever har liten kjennskap til oppgavetypene vi ser på her.

6.2 Konklusjon i lys av forskningsspørsmålene

Jeg vil nå forsøke å konkludere denne oppgaven ved å svare på forskningsspørsmålene og problemstillingen. La meg først minne om hvilke spørsmål jeg stilte i innledningen:

Problemstilling*: I hvilken grad kan en studie av besvarelser på utvalgte algebraoppgaver fra TIMSS 2011 gi en dypere forståelse av hva norske elever på 8. trinn kan og ikke kan i algebra?*

Med forskningsspørsmål:

1) Hvilken informasjon kan feilsvarene på algebra-oppgaver fra TIMSS-undersøkelsen gi oss om norske 8.trinn-elevers algebraforståelse.

2) Hvordan kan denne informasjonen supplere tidligere og parallell forskning på området?

Det første forskningsspørsmålet kan besvares med de funnene som er presentert i forrige avsnitt. Feilsvarene på algebraoppgaver i TIMSS forteller oss at mange elever gjetter når de svarer, eller at de i mangel av nødvendige verktøy velger nærliggende, feilaktige løsninger som vitner om liten kompetanse i algebra. De forteller oss at norske elever på 8. trinn har liten forståelse av generaliseringskonseptet, de klarer ikke å sette opp en ligning på bakgrunn av opplysninger i en oppgave, og de er ikke gode på ligningsløsning hvis de har en ligning foran seg. De har begrenset forståelse for algebraiske symboler, og de sliter med overgangen fra aritmetikk til generalisert aritmetikk, manipulering av algebraiske uttrykk. De oppgavene som viser en viss grad av mestring er for det første prealgebraoppgaver som kan løses ved «sunn fornuft» eller med strategier elevene kjenner fra mellomtrinnet, og for det andre flervalgsoppgaver med lav vanskelighetsgrad som ikke krever større algebraisk forståelse enn at en bokstav kan ha en numerisk verdi.

Når det gjelder det andre forskningsspørsmålet, vil jeg si at funnene gir til dels sterke indikasjoner på at læringsmulighetene i algebra ikke er gode nok. Det er spesielt de svake resultatene på generaliserings- og modelleringsoppgaven som støtter opp under dette. Selv om oppgavene er av de vanskeligste i TIMSS 2011, bør man kunne forvente at noen flere ville løst oppgaven tilfredsstillende, og at noen av feilsvarene ville vist en større grad av forståelse enn det de gjør hvis læringsmulighetene hadde vært gode, og elevene dermed hadde noen erfaring med den typen oppgaver vi her ser at de sliter med. Det at så få synes å ha en oppfatning om hvordan disse oppgavene løses, om det så var feiloppfatninger, er også et poeng som peker mot mangelfulle læringsmuligheter i algebra. Disse betraktningene støtter oppunder Grønmo et al. (2012) som foreslår at de svake resultatene i algebra delvis kan forklares med at norske elever lærer algebra senere enn i andre land, og dermed kan bli testet i stoff de ikke har lært ennå. Dette er også i tråd med Karimzadeh (2014) og hennes analyse av norske og singaporske lærebøker som viser at norske lærebøker for 8. trinn, i motsetning til singaporske, har altfor få oppgaver i for eksempel modellering og generalisering.

I tillegg bør det poengteres at funnet om kontrasten mellom formelle algebraoppgaver og prealgebraoppgaver, støtter opp om en rekke forskningsrapporten som sier det samme. Norske elever sliter klart mer med oppgaver som krever formelle algebrakunnskaper enn med de som ikke gjør det.

Jeg vil så forsøke å gi et kortfattet svar på problemstillingen. Jeg mener at funnene i denne oppgaven i nokså stor grad styrker tidligere forskning som antyder at algebraforståelse og læringsmuligheter i algebra hos elever på 8. trinn er svært begrensede, og i større grad enn om vi bare hadde sett på scoringene som ble foretatt i TIMSS 2011. Denne studien gir oss mer informasjon om feiltypene som er begått, og både nyanserer og styrker inntrykket av at norske 8. trinn-elevers kompetanse i algebra er altfor lav. Ved å studere enkeltbesvarelser har jeg sett at det er sterke elever i norsk skole som er gode problemløsere, men som ser ut til å mangle de nødvendige verktøy som algebraen tilbyr. Når de sterke elevene viser svært begrensede ferdigheter i algebra, og den store majoriteten som ikke er blant de sterkeste tydelig har liten eller ingen forståelse for de fem algebraiske konseptene som er beskrevet i denne oppgaven, synes det klart at norske elever på 8. trinn kan svært lite algebra. Validiteten til denne konklusjonen vil blant annet avhenge av i hvilken grad det finnes alternative forklaringer til elevenes svake resultater, og hvor sannsynlige disse er. Jeg har diskutert muligheten for reliabilitetstrusselen som går på at elevenes reelle kompetanse er høyere enn det den er målt til her på grunn av eventuelle mangler i motivasjon til å prestere best mulig på prøvene. Da jeg ikke har mulighet til å få vite hvilke tanker som ligger bak blanke og tilsynelatende tilfeldige svar, kan jeg ikke helt se bort fra denne muligheten. Jeg finner det imidlertid usannsynlig at det skjuler seg tilstrekkelig med algebraisk kompetanse bak slike svar til at jeg ville måtte endre på min konklusjon.

Jeg vil til slutt oppfordre leseren av denne oppgaven til å lese masteroppgaven til Anita Karimzadeh som er skrevet parallelt med denne. Hun tar også utgangspunkt i TIMSS-data, men har lærebøker som tilnærming, og som nevnt sammenligner den blant annet norske og Singaporske lærebøker. Hennes funn vil ytterlige styrke og forklare det mine funn peker i retning av. Et illustrerende eksempel er at 3 av 4 læreverk for 8. trinn ikke har en eneste oppgave som introduserer eleven for modelleringsprosessen vi ser i oppgave 17 som går ut på å sette opp en ligning ut ifra opplysninger i oppgaven for deretter å løse den. Kombinerer vi funn fra begge disse masteroppgavene sitter vi igjen med svært sterke indikasjoner på at elevenes forutsetninger for å løse rene algebraoppgaver i TIMSS er små og at norske elever på 8. trinn generelt kan svært lite algebra.

6.3 Implikasjoner for skolen

Hvis leserne av denne oppgaven aksepterer konklusjonene som gyldige, og ser oppgaven i sammenheng med Anita Karimzades parallelle oppgave om lærebøker, er det liten tvil om at norske elever på 8. trinn har lave forutsetninger for å gjøre det bra i algebra på undersøkelser som TIMSS. Samtidig vil jeg understreke at eventuelle endringer i norsk skole ikke bør motiveres av at vi ønsker å oppnå bedre resultater på internasjonale tester. Endringer som kan føre til økt kompetanse i algebra vil være gunstige fordi algebra er et svært viktig verktøy i matematikken, og fordi økt kompetanse i algebra vil gjøre elevene bedre utrustet til å beherske andre deler av matematikken. En slik endring kan være at algebra innføres på et tidligere tidspunkt i skolen. Dette er vanskelig å gjennomføre med dagens læreplan fordi kompetansemålene ikke er spesifikke nok når de gjelder for hele ungdomstrinnet i stedet for hvert trinn. Hvis norske myndigheter ønsker gjøre elevene i stand til å beherske oppgaver med for eksempel modellering og generalisering, bør dette inn som kompetansemål som er spesifikke for 8. trinn eller tidligere. Det bør så stilles krav til norske lærebokforfattere om varierte og gode oppgaver som, hvis vi bruker ligningsløsning som eksempel, ikke bare lærer bort ligningsløsningsteknikker, men som også sier noe om hvorfor vi trenger ligninger og hva vi trenger dem til, demonstrert med praksisnære modelleringsoppgaver, slik at elevenes læringsmuligheter i algebra kan styrkes betydelig. Norske lærere, som i stor grad følger lærebøkene i undervisningen, vil kunne ta dette inn i klasserommene, og vi kan håpe på en kompetanseheving i norsk skole. Nå hevder jeg ikke at dette er eneste løsning på et komplekst problem, og jeg innser også at dette ikke er enkle tiltak, men tvert imot ressurskrevende og langsiktige endringer som berører alle ledd i skolesystemet. Samtidig tror jeg ikke vi kan unngå noen dramatiske endringer hvis vi skal heve kompetansenivået i skolen. For øvrig vil jeg oppfordre til ytterligere forskningsinnsats på problemstillinger rundt norske elevers utfordringer med algebra. Denne oppgaven har kun belyst ett av mange aspekter som kan bidra til forklaringer og forslag til løsninger for å styrke norske elevers kompetanse i algebra.

Litteraturliste

Amrein, Audrey L. & Berliner, David C. (2002). *High-Stakes Testing, Uncertainty, and Student Learning*. Hentet 22.05 fra http://epaa.asu.edu/ojs/article/view/297

Ary, Donald, Walker, David A. & Jacobs, Lucy Cheser. (2014). *Introduction to research in education*. [Belmont, Calif.]: Wadsworth Cengage Learning.

Aubert, Karl Egil. (2014). *Algebra*. Hentet 03.03 fra http://snl.no/algebra

Bednarz, Nadine, Kieran, Carolyn & Lee, Lesley. (1996). *Approaches to Algebra - Perspectives for Research and Teaching*. Dordrecht/ Boston/ London: Kluwer Academic Publishers.

Bell, Alan. (1996). Problem-Solving Approaches to algebra: Two Aspects. I N. Bednarz, C. Kieran, & L. Lee (Red.), *Approaches to algebra - Perspectives for Research and Teaching* (s. 167-185). Dordrecht/ Boston/ London: Kluwer Academic Publishers.

Björkquist, Ole. (2003). Matematisk problemløsning. I B. Grevholm (Red.), *Matematikk for skolen* (s. 51-57). Bergen: Fagbokforlaget.

Booth, Lesley R. (1999). *Children's Difficulties in Beginning Algebra*. Hentet 21.5 fra http://elementaryalgebra.cmswiki.wikispaces.net/file/view/Childrens+Difficulties+in+Beginning+Algebra.pdf/142535729/Childrens+Difficulties+in+Beginning+Algebra.pdf

Brinkmann, Svend & Tanggard, Lene. (2012). *Kvalitative Metoder - Empiri og teoriutvikling*. Oslo: Gyldendal akademisk.

Britt, Murray S. & Irwin, Katheryn C. (2011). Algebraic Thinking with and without Algebraic Representation: A Pathway for Learning. I J. Cai, & E. Knuth (Red.), *Early Algebraization: A Global Dialogue from Multiple Perspectives* (s. 137-159). Heidelberg: Springer.

Carraher, David W. & Schliemann, Analucia D. (2007). Early algebra and Algebraic Reasoning. I F. K. Lester Jr (Red.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (Bind 2, s. 669-706). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Cohen, Louis, Manion, Lawrence & Morrison, Keith. (2011). *Research methods in education*. London: Routledge.

Creswell, John W. (2014). *Research design: qualitative, quantitative, and mixed methods approaches*. Los Angeles, Calif.: SAGE.

Dahl, Charlotte Merete. (2011). *Diagnostiske oppgaver i matematikkundervisningen: Hvilken informasjon kan lærere få ved bruk av diagnostiske oppgaver i undervisningen?* (Masteroppgave, Det utdanningsvitenskapelige fakultet, Universitetet i Oslo). Oslo.

Drouhard, Jean-Philippe & Teppo, Anne R. (2004). Symbols and Language. I K. Stacey, H. Chick, & M. Kendal (Red.), *The Future of the Teaching and Learning of Algebra: The 12th ICMI Study* (s. 227-264). Boston/ Dordrecht/ New York/ London: Kluwer Academic Publishers.

Fujii, T. & Stephens, M. (2001). Fostering an Understanding of Algebraic Generalisation through Numerical Expressions: The Role of Quasi-Variables. I H. Chick, K. Stacey, J. Vincent, & J. Vincent (Red.), *The Future of the Learning and Teaching of Algebra: Proceedings of the12th ICMI Study Conference* (s. 258-264). Melbourne, Australia: The University of Melbourne.

Grinde, Eva. (2012). *Algebrakrise i norsk skole*. Hentet 21.5 fra http://www.dn.no/meninger/kommentarer/2012/12/12/algebrakrise-i-norsk-skole

Grønmo, Liv Sissel & Bergem, Ole Kristian. (2009). Prestasjoner i matematikk. I L. S. Grønmo, & T. Onstad (Red.), *Tegn til bedring: Norske elevers prestasjoner i matematikk og naturfag i TIMSS 2007* (s. 49-111). Oslo: Unipub.

Grønmo, Liv Sissel, Borge, Inger Christin & Onstad, Torgeir. (2013). Hvor står vi - hvor går vi? I L. S. Grønmo, & T. Onstad (Red.), *Opptur og Nedtur: Analyser av TIMSS-data for Norge og Sverige* (s. 163-169). Oslo: Akademika forlag.

Grønmo, Liv Sissel, Borge, Inger Christin & Rosén, Monica. (2013). Læringsmuligheter og prestasjoner i matematikk på 8. trinn. I L. S. Grønmo, & T. Onstad (Red.), *Opptur og Nedtur - Analyser av TIMSS-data for Norge og Sverige* (s. 196). Oslo: Akademika forlag.

Grønmo, Liv Sissel & Onstad, Torgeir. (2012). Matematikk i norsk skole og lærerutdanning. I L. S. Grønmo, & T. Onstad (Red.), *Mange og store utfordringer: Et nasjonalt og internasjonalt perspektiv på utdanning av lærere i matematikk basert på data fra TEDS-M 2008* (s. 175-196). Oslo: Unipub.

Grønmo, Liv Sissel, Onstad, Torgeir, Nilsen, Trude, Hole, Arne, Aslaksen, Helmer & Borge, Inger Christin. (2012). *Framgang, men langt fram - Norske elevers prestasjoner i matematikk og naturfag i TIMSS 2011*. Oslo: Akademika forlag.

IEA, The International Association for the Evaluation of Educational Achievement. (2012). *Frigjorte oppgaver*. Hentet 25.05.2014 fra http://www.timss.no/timss05_frigitte.html

Janvier, Claude. (1996). Modeling and the Initiation into Algebra. I N. Bednarz, C. Kieran, & L. Lee (Red.), *Approaches to Algebra: Perspectives for Research and Teaching* (s. 225-236). Dordrecht/ Boston/ London: Kluwer Academic Publishers.

Karimzadeh, Anita. (2014). *Algebra i norske og singaporske lærebøker: En sammenligning av norske og singaporske lærebøker i ligninger og ulikheter*, Det Utdanningsvitenskapelige Fakultet, Universitetet i Oslo). Oslo.

Kieran, Carolyn. (2004). The Core of Algebra: Reflections on its Main Activities. I K. Stacey, H. Chick, & M. Kendal (Red.), *The Future of the Teaching and Learning of Algebra: The 12thICMI Study* (s. 21-33). Boston/ Dordrecht/ New York/ London: Kluwer Academic Publishers.

Kieran, Carolyn. (2007). Learning and Teaching Algebra at the Middle School through College Levels: Building Meaning for Symbols and their Manipulation. I F. K. Lester Jr (Red.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (s. 707-762). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Kleven, Thor Arnfinn, Hjardemaal, Finn & Tveit, Knut. (2011). *Innføring i pedagogisk forskningsmetode - en hjelp til kritisk tolkning og vurdering*. Oslo: Unipub.

Knuth, Eric, Alibali, Martha W., McNeil, Nicole M., Weinberg, Aaron & Stephens, Ana C. (2011). Middle School Students' Understanding of Core Algebraic Concepts: Equivalence & Variable. I J. Cai, & E. Knuth (Red.), *Early algebraization: A Global Dialogue from Multiple Perspectives* (s. 259-276). Heidelberg: Springer.

Lee, Lesley. (1996). An Initiation into Algebraic Culture through Generalization Activities. I N. Bednarz, C. Kieran, & L. Lee (Red.), *Approaches to Algebra - Perspectives for Research and Teaching* (s. 87-106). Dordrecht/ Boston/ London: Kluwer Academic Publishers.

Lins, Romulo & Kaput, James. (2004). The Early Development of Algebraic Reasoning: The Current state of the Field. I K. Stacey, H. Chick, & M. Kendal (Red.), *The Future of the Teaching and Learning of Algebra: The 12th ICMI Study* (s. 47-70). Boston/ Dordrecht/ New York/ London: Kluwer Academic Publishers.

Mason, John. (1996). Expressing Generality and Roots of Algebra. I N. Bednarz, C. Kieran, & L. Lee (Red.), *Approaches to Algebra: Perspectives for Research and Teaching* (s. 65-86). Dordrecht/ Boston/ London: Kluwer Academic Publishers.

Maxwell, Joseph A. (2005). *Qualitative research design: an interactive approach*. Thousand Oaks, Calif.: Sage Publications.

Mellin-Olsen, Stieg. (1981). Instrumentalism as an educational concept. *Educational Studies in Mathematics*, *12*(3), 351-367.

Naalsund, Margrethe. (2012). *Why is algebra so difficult? A study of Norwegian lower secondary students' algebraic proficiency*, Faculty of educational sciences, University of Oslo). Oslo.

Nemirovsky, Ricardo. (1996). Mathematical narratives, modeling and algebra. I N. Bednarz, C. Kieran, & L. Lee (Red.), *Approaches to Algebra: Perspectives for Research and Teaching* (s. 197-220). Dordrecht/ Boston/ London: Kluwer Academic Publishers.

Niss, Mogens. (2006). The Structure of Mathematics. I J. Maasz, & Schloeglmann (Red.), *New Mathematics Education Research and Practice* (s. 51-62). Rotterdam: Sense Publishers.

Onstad, Torgeir. (1994). *Fra Babel til Abel: Likningenes historie*. Oslo: NKS-Forlaget.

Pòlya, George. (1973). *How to Solve it*. Princeton, NJ: Princeton University Press.

Puig, Luis & Rojano, Teresa. (2004). The History of Algebra in Mathematics Education. I K. Stacey, H. Chick, & M. Kendal (Red.), *The Future of the Teaching and Learning of algebra: The 12th ICMI Study* (s. 189-223). Boston/ Dordrecht/ New York/ London: Kluwer Academic Publishers.

Rivera, F.D. & Becker, Rossi. (2011). Formation of Pattern Generalization Involving Linear Figural Patterns Among Middle School Students: Results of a Three-Year Study. I J. Cai, & E. Knuth (Red.), *Early Algebraization: AGlobal Dialogue from Multiple Perspectives* (s. 323-366). Heidelberg: Springer.

Russell, Susan Jo, Schifter, Deborah & Bastable, Virginia. (2011). Developing Algebraic Thinking in the Context of Arithmetic. I J. Cai, & E. Knuth (Red.), *Early Algebraization: A Global Dialogue from Multiple Perspectives* (s. 43-70). Heidelberg: Springer.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical Problem Solving*. Orlando: Academic Press.

Selvik, Bjørg Kristin, Rinvold, Reinert A. & Høines, Marit Johnsen. (2007). *Matematiske sammenhenger, Algebra og funksjonslære*. Bergen: Caspar forl.

Sfard, Anna. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objecys as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, *22*(1), 1-36.

Sjøberg, Svein. (2007). Internasjonale undersøkelser: Grunnlaget for kunnskapsløftet? I H. Hølleland (Red.), *På vei mot kunnskapsløftet?* (s. 112-134). Oslo: Cappelen akademiske forlag.

Solvang, Ragnar. (1992). *Matematikk-didaktikk*. Oslo: NKI-Forlaget.

Subramaniam, K. & Banerjee, Rakhi. (2011). The Arithmetic-Algebra Connection: A Historical-Pedagogical Perspective. I J. Cai, & E. Knuth (Red.), *Early Algebraization: A Global Dialogue from Multiple Perspectives* (s. 87-108). Heidelberg: Springer.

Sutherland, Rosamund. (2004). A Toolkit for Analysing Approaches to Algebra. I K. Stacey, H. Chick, & M. Kendal (Red.), *The Future of the Teaching and Learning of Algebra: The 12th ICMI Study*. Boston/ Dordrecht/ New York/ London: Kluwer Academic Publishers.

Tashakkori, Abbas & Teddlie, Charles. (1998). *Mixed Methodology: Combining Qualitative and Quantitative Approaches*. Thousand Oaks/ London/ New Dehli: Sage Publications.

Utdanningsdirektoratet. (2014). *Læreplan i matematikk fellesfag - kompetansemål*. Hentet 01.03 fra http://www.udir.no/kl06/MAT1-04/Kompetansemaal/?arst=98844765&kmsn=583858936

Wheeler, David. (1996). Backwards and Forwards: Reflections on Different Approaches to Algebra. I N. Bednarz, C. Kieran, & L. Lee (Red.), *Approaches to Algebra - Perspectives for Research and Teaching* (s. 317-325). Dordrecht/ Boston/ London: Kluwer Academic Publishers.